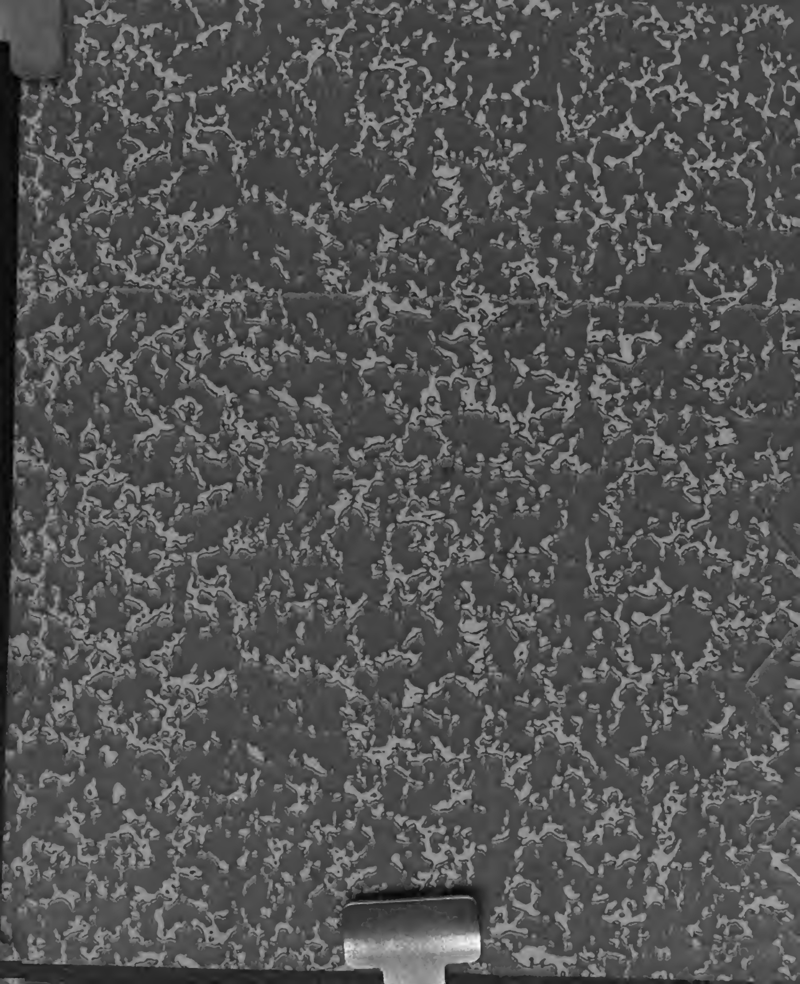
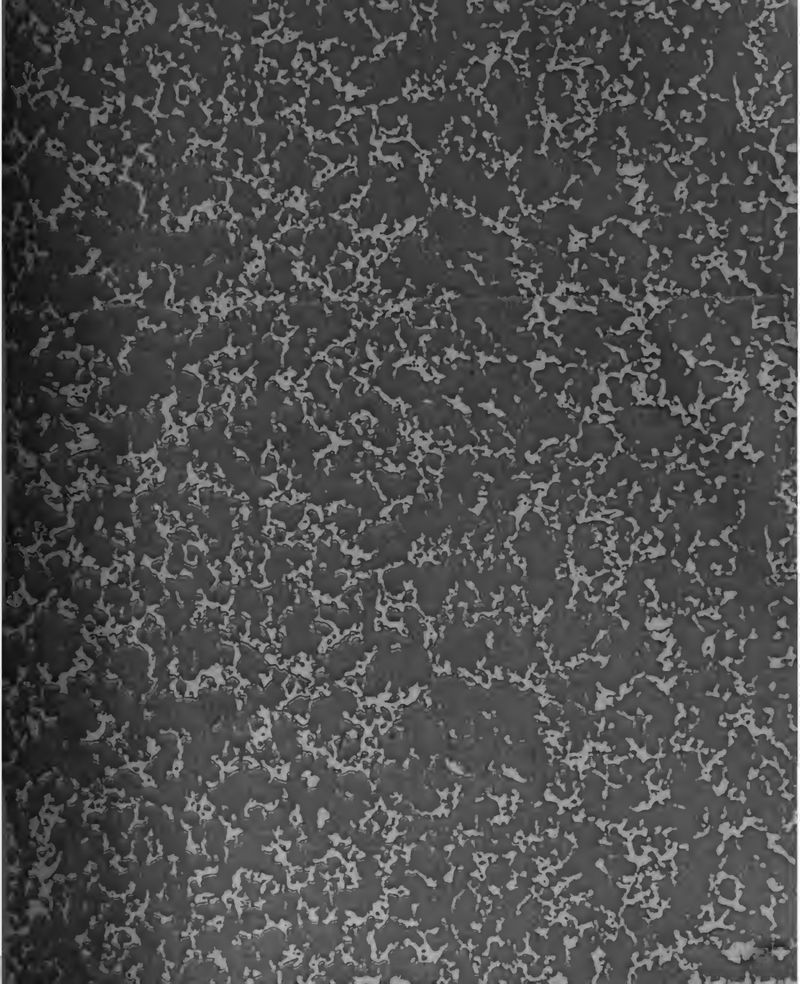
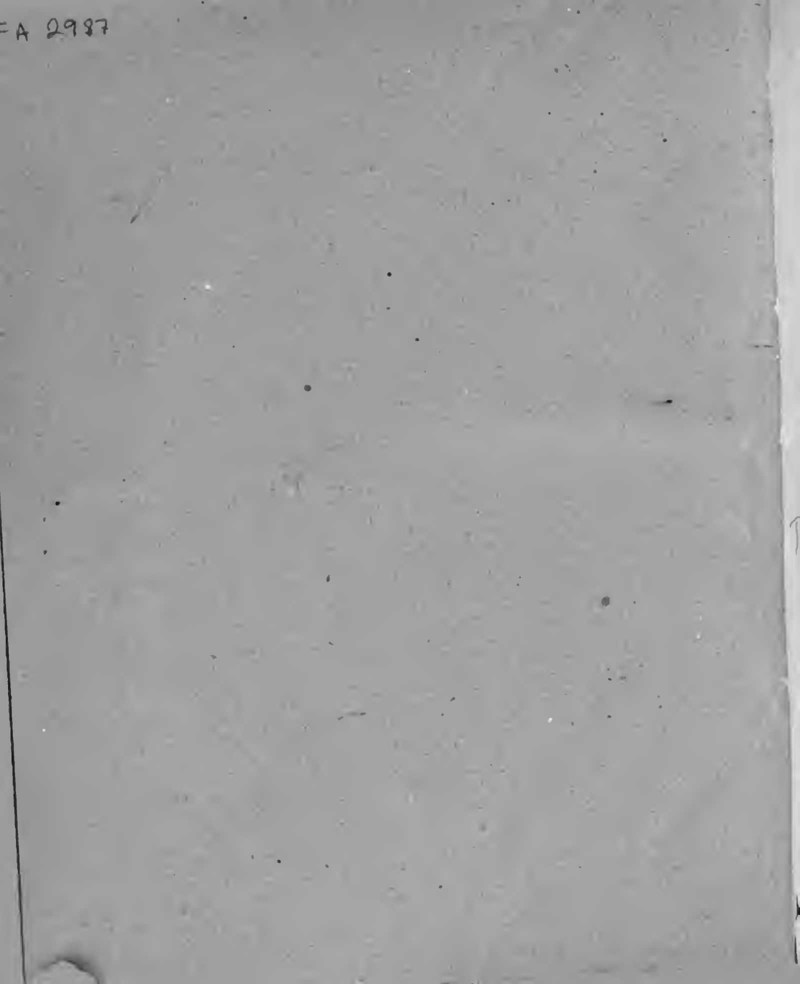
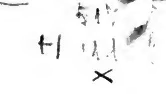

MADRID
Digitized by Google















MÉMOIRE

SUR UNE MÉTHODE POUR DÉDUIRE QUELQUES

INTÉGRALES DÉFINIES,

EN PARTIE TRÈS-GÉNÉRALES,

PRISES ENTRE LES LIMITES 0 ET ∞ ET CONTENANT DES FONCTIONS CIRCULAIRES DIRECTES.

PAR

D. BIERENS DE HAAN.





1. L'évaluation d'intégrales définies n'étant pas sujette en général à des règles générales ou à des méthodes assignables de prime abord, on a imaginé diverses méthodes pour y parvenir, les unes plus indirectes encore que les autres. Soit qu'on s'adresse à la théorie des suites ou à celle des intégrales doubles, soit qu'on divise la distance des limites ou qu'on différentie suivant quelque constante; c'est presque toujours en tâtonnant qu'on cherche une voie qui mène au but, sans avoir aucune certitude sur la réussite; et maintefois le travail ne nous ramène qu'à une autre fonction aussi inconnue que l'intégrale cherchée. Quoique ce genre de résultats ne compte pas pour rien dans l'Analyse, nous n'en avons pas moins manqué le but de notre recherche. Mais encore y a-t-il un genre de déductions, beaucoup plus indirectes que celles-ci, où même la forme de l'intégrale à évaluer est aussi inconnue que sa valeur; et parmi ces déductions se trouve entr'autres une classe de théorèmes généraux, en général compliqués d'imaginaires.

C'est surtout à l'illustre Cauchy, qu'on est redevable de ces théorèmes, qu'il a déduits par le calcul des résidus: de cette manière il est parvenu à divers résultats très-intéressants; mais on peut en obtenir encore par la considération des séries.

Lorsqu'on emploie des séries pour l'évaluation d'une intégrale définie, le résultat peut se présenter comme une série de quantités constantes ou comme une série d'intégrales définies. Quand les valeurs de ces dernières sont inconnues, on se

trouve conduit à une de ces relations, dont il a été question plus haut; mais quand la valeur en est connue, on se trouve ramené après leur évaluation à une nouvelle série. Or, ces séries, — les dernières tout comme celles que nous obtenions d'abord, — peuvent quelquefois être réduites à une forme finie, et alors il y a évaluation proprement dite: ou elles ne peuvent pas être réduites à une telle forme, et alors il n'y a que la réduction d'une intégrale définie à une série. Le premier de ces cas admet quelquefois une solution bien simple, lorsque la série est de nature à être sommée moyennant le théorème de TAYLOR; et c'est de ce cas-ci que traitera ce Mémoire.

On y trouvera en premier lieu divers théorèmes généraux, qui par leur spécialisation donneront lieu ensuite a des évaluations d'intégrales définies nouvelles, dont plusieurs comportent elles-mêmes une généralité assez grande, en ce qu'elles contiennent un nombre arbitraire de certains facteurs. Celles-ci, soit par des équations de condition entre les constantes, soit par la différentiation par rapport à quelque constante qui se trouve dans l'intégrale définie, donneront lieu enfin dans divers cas à des résultats bien simples et remarquables. Enfin nous déduirons encore des résultats obtenus quelques intégrales définies doubles, du genre des fonctions réciproques de CAUCHY.

2. Supposons qu'une fonction soit de la forme $F(x) = f(\alpha + \beta e^{rx})$, . . . ($\alpha$) où α, β, r désignent des grandeurs réelles, positives ou négatives; cette supposition, on le concevra aisément, donnera lieu à bon nombre de formes diverses. Cherchons les sommes

$$\frac{1}{2}\Big[F(xi) + F(-xi)\Big] \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i}\Big[F(xi) - F(-xi)\Big],$$

en les développant suivant le théorème de TAYLOR; alors par l'intermédiaire des formules connues

$$e^{axi} + e^{-axi} = 2\,Cos.\,ax,\quad e^{axi} - e^{-axi} = 2i\,Sin.\,ax$$

nous obtiendrons d'abord les résultats suivants:

$$\frac{1}{2}\Big[F(xi)+F(-xi)\Big] = f(\alpha) + \beta\,\frac{Cos.\,rx}{1}\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \beta^2\,\frac{Cos.\,2rx}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \quad . \;.\;.\;. \quad (A)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F(xi)-F(-xi)\Big] = \beta\,\frac{Sin.\,rx}{1}\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \beta_2\,\frac{Sin.\,2rx}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \quad . \;.\;.\;. \quad (B)$$

Faisons ensuite $F_1(x) = f(\alpha + \beta e^{rx}, \alpha_1 + \beta_1 e^{r_1 x})$, ... (β) forme qui maintenant contient deux arguments, semblables à celui de la fonction (α); alors nous trouvons par la même méthode:

$$\frac{1}{2}\Big[F_1(xi)+F_1(-xi)\Big]=f(\alpha,\alpha_1)+\beta\,\frac{Cos.\,rx}{1}\,\frac{df(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha}+\beta_1\,\frac{Cos.\,r_1x}{1}\,\frac{df(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha_1}+$$
$$+\beta^2\,\frac{Cos.\,2rx}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha^2}+2\beta\beta_1\,\frac{Cos.\{(r+r_1)x\}}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha\,d\alpha_1}+\beta_1{}^2\,\frac{Cos.\,2r_1x}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha_1{}^2}+$$
$$+\dots\quad\text{(C)}$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_1(xi)-F_1(-xi)\Big]=\qquad\beta\,\frac{Sin.\,rx}{1}\,\frac{df(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha}+\beta_1\,\frac{Sin.\,r_1x}{1}\,\frac{df(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha_1}+$$
$$+\beta^2\,\frac{Sin.\,2rx}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha^2}+2\beta\beta_1\,\frac{Sin.\{(r+r_1)x\}}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha\,d\alpha_1}+\beta_1{}^2\,\frac{Sin.\,2r_1x}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha_1{}^2}+$$
$$+\dots\quad\text{(D)}$$

Soit enfin généralement $\quad F_s(x)=f(\alpha+\beta e^{rx},\alpha_1+\beta_1e^{r_1x},\alpha_2+\beta_2e^{r_2x},\dots),\quad\dots\quad(7)$
où le nombre des arguments, semblables à celui de la fonction (α), est dorénavant absolument arbitraire. Il est clair que l'application analogue de la même méthode de développement nous donnera ici les résultats suivants:

$$\frac{1}{2}\Big[F_s(xi)+F_s(-xi)\Big]=f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)+\beta\,\frac{Cos.rx}{1}\,\frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha}+\beta_1\,\frac{Cos.r_1x}{1}\,\frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_1}+\beta_2\,\frac{Cos.r_2x}{1}$$
$$\frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_2}+\dots+\beta^2\,\frac{Cos.2rx}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha^2}+2\beta\beta_1\,\frac{Cos.\{(r+r_1)x\}}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha\,d\alpha_1}+\beta_1{}^2\,\frac{Cos.2r_1x}{1.2}$$
$$\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_1{}^2}+2\beta\beta_2\frac{Cos.\{(r+r_2)x\}}{1.2}\,\frac{d^2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha\,d\alpha_2}+2\beta_1\beta_2\frac{Cos.\{(r_1+r_2)x\}}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_1\,d\alpha_2}+\beta_2{}^2\frac{Cos.2r_2x}{1.2}$$
$$\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_2{}^2}+\dots,\quad\text{(E)}$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_s(xi)-F_s(-xi)\Big]=\qquad\beta\,\frac{Sin.rx}{1}\,\frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha}+\beta_1\,\frac{Sin.r_1x}{1}\,\frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_1}+\beta_2\,\frac{Sin.r_2x}{1}$$
$$\frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_2}+\dots+\beta^2\,\frac{Sin.2rx}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha^2}+2\beta\beta_1\,\frac{Sin.\{(r+r_1)x\}}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha\,d\alpha_1}+\beta_1{}^2\,\frac{Sin.2r_1x}{1.2}$$
$$\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_1{}^2}+2\beta\beta_2\frac{Sin.\{(r+r_2)x\}}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha\,d\alpha_2}+2\beta_1\beta_2\frac{Sin.\{(r_1+r_2)x\}}{1.2}\,\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_1\,d\alpha_2}+\beta_2{}^2\frac{Sin.2r_2x}{1.2}$$
$$\frac{d^2f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots)}{d\alpha_2{}^2}+\dots\quad\text{(F)}$$

Supposons à présent que l'on multiplie ces développements de part et d'autre par $\varphi(x)dx$, où $\varphi(x)$ peut être une fonction quelconque de x; et qu'on intègre ensuite les produits entre les limites χ_1 et χ_2 de x. Dès-lors les premiers membres en auront la forme:

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2}\frac{1}{2}\Big[F_s(xi)+F_s(-xi)\Big]\varphi(x)\,dx\quad\text{et}\quad\int_{\chi_1}^{\chi_2}\frac{1}{2i}\Big[F_s(xi)-F_s(-xi)\Big]\varphi(x)\,dx,\qquad(8)$$

et constitueront des intégrales définies, à forme inconnue encore et changeante avec des valeurs spéciales pour les α, β, γ. Mais ces formules ne seront utiles que lorsque les derniers membres peuvent se soumettre à une expression simple.

A cet effet il faut en premier lieu que les intégrales définies

$$\int_{X_1}^{X_2} Cos.\, s\, x.\ \varphi(x)\, d\, x \quad \text{et} \quad \int_{X_1}^{X_2} Sin.\, s\, x.\ \varphi(x)\, d\, x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

aient des valeurs connues, déterminées, soit $\chi(s)$ et $\psi(s)$. Puis il est nécessaire pour la méthode spéciale dont nous traitons ici, que les séries, exprimant les valeurs des intégrales définies (δ), acquièrent après la substitution des $\chi(s)$ et des $\psi(s)$ une telle forme qu'on puisse les regarder comme des développements obtenus par le théorème de TAYLOR; en d'autres mots, qu'on puisse sommer ces séries à l'aide de ce théorème.

Donc, pour que l'application de cette méthode soit permise et légitime, il est d'une nécessité absolue, mais aussi il suffit, qu'il n'y ait aucune objection contre

1°. les développements (A) et (B), et leurs analogues;

2°. ces mêmes développements, après le changement de $Cos.\, s\, x$ et de $Sin.\, s\, x$ en $\chi(s)$ et $\psi(s)$ respectivement.

Ces conditions satisfaites, il suit du raisonnement précédent que tout le succès de notre méthode dépend de l'intégrabilité entre certaines limites des fonctions $Cos.\, s\, x.\ \varphi(x)\, d\, x$ et de $Sin.\, s\, x.\ \varphi(x)\, d\, x$. Par conséquent il faut *choisir* la fonction $\varphi(x)$ telle que les intégrales (ε) se trouvent comprises parmi les intégrales définies connues: donc, ce n'est que pour ces quelques formes de $\varphi(x)$ que nous pourrons évaluer par cette méthode les intégrales définies (δ). Or, celles-ci dépendent en outre, par leur premier facteur, tant de la forme de la fonction $f(x)$ que des valeurs spéciales pour les constantes générales α, β, γ: donc il est évident que la forme des intégrales à évaluer par cette méthode ne sera pas assignable de prime abord, mais qu'elle résultera d'un calcul à faire d'après les diverses suppositions préalables.

Dans la suite nous nous restreindrons aux intégrales entre les limites 0 et ∞; nous chercherons d'abord les formes convenables de $\varphi(x)$, pour en déduire des théorèmes généraux; enfin dans ces théorèmes nous substituerons diverses valeurs pour la fonction $f(x)$ et pour les constantes α et β

§ 1. DE QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES A DÉNOMINATEUR ALGÉBRIQUE MONÔME.

3. Puisqu'on a $\int_0^\infty Sin. ax \frac{dx}{x}, = \frac{1}{2}\pi, (a > 0)$ (ζ) [1], multiplions les formules (B), (D) et (F) par $\frac{dx}{x}$ et intégrons entre les limites 0 et ∞; nous aurons ainsi par (B):

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\frac{dx}{x} = \beta\frac{\pi}{2}\frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2}\frac{\pi}{2}\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots = \frac{\pi}{2}\{f(\alpha+\beta)-f(\alpha)\}; \quad \ldots \quad (I)$$

et de même par (D) et (F):

$$\int_0^\infty \frac{F_1(xi)-F_1(-xi)}{2i}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\{f(\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1)-f(\alpha, \alpha_1)\}, \quad \ldots \quad (II)$$

$$\int_0^\infty \frac{F_n(xi)-F_n(-xi)}{2i}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\{f(\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2 \ldots)-f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots)\}. \quad \ldots \quad (III)$$

Parce que $\int_0^\infty Cos. ax \frac{Sin. x dx}{x} = 0$, $\int_0^\infty Sin. ax \frac{Cos. x dx}{x} = \frac{\pi}{2}, (a > 0)$, ($\eta$) [2], les développements (A) à (F) donneront après la multiplication par $\frac{Sin. x dx}{x}$ et $\frac{Cos. x dx}{x}$:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2}\frac{Sin. xdx}{x} = \frac{\pi}{2}f(\alpha), \quad . \quad (IV), \qquad \int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\frac{Cos. xdx}{x} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\{f(\alpha+\beta)-f(\alpha)\}, \quad . \quad (V), \qquad \int_0^\infty \frac{F_1(xi)+F_1(-xi)}{2}\frac{Sin. xdx}{x} = \frac{\pi}{2}f(\alpha, \alpha_1), \quad \ldots \quad (VI)$$

$$\int_0^\infty \frac{F_1(xi)-F_1(-xi)}{2i}\frac{Cos. xdx}{x} = \frac{\pi}{2}\{f(\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1)-f(\alpha, \alpha_1)\}, \quad \ldots \quad (VII)$$

$$\int_0^\infty \frac{F_n(xi)+F_n(-xi)}{2}\frac{Sin. xdx}{x} = \frac{\pi}{2}f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \quad . \quad (VIII), \qquad \int_0^\infty \frac{F_n(xi)-F_n(-xi)}{2i}\frac{Cos. xdx}{x} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\{f(\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2 \ldots)-f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots)\}; \quad \ldots \quad (IX)$$

où encore nous avons dû employer l'intégrale (ζ).

Encore a-t-on $\int_0^\infty Sin. ax \frac{Sin. xdx}{x^2} = \frac{\pi}{2}$ (θ) [3]; donc:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\frac{Sin. xdx}{x^2} = \frac{\pi}{2}\{f(\alpha+\beta)-f(\alpha)\}, \quad . \quad (X), \qquad \int_0^\infty \frac{F_1(xi)-F_1(-xi)}{2i}\frac{Sin. xdx}{x^2} =$$

[1] Voyez mes Tables d'intégrales définies (Verhand. Kon. Akademie van Wetenschappen. Tome IV). Table 194, N°. 5.

[2] Voyez Table 195, N°. 2, 3.

[3] Voyez Table 198, N°. 2 (pour $q = 1$) et ma Note dans le „Archief van het Genootschap: Een onvermoeide Arbeid, enz." Tome I, page 288.

$= \frac{\pi}{2} \{f(\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1) - f(\alpha,\alpha_1)\}$. (XI). $\int_0^\infty \frac{F_a(xi) - F_a(-xi)}{2i} \frac{Sin. xdx}{x^2} =$

$= \frac{\pi}{2} \{f(\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots) - f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\}$ . . . . (XII)

Enfin par l'intermédiaire de l'intégrale $\int_0^\infty Sin. ax \frac{Sin.^2 xdx}{x^2} = \frac{\pi}{2}, (a \gtrequal 2), =$
$= \frac{3}{8}\pi, (a=1), (\iota)$ [4] on trouve:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi) - F(-xi)}{2i} \frac{Sin.^2 xdx}{x^2} = \frac{\pi}{2} \left\{ f(\alpha+\beta) - f(\alpha) - \tfrac{1}{4}\beta \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right\}, \quad \text{(XIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_1(xi) - F_1(-xi)}{2i} \frac{Sin.^2 xdx}{x^2} = \frac{\pi}{2} \left\{ f(\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1) - f(\alpha,\alpha_1) - \tfrac{1}{4}\beta \frac{df(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha} - \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}\beta_1 \frac{df(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha_1} \right\}, \quad \text{(XIV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi) - F_a(-xi)}{2i} \frac{Sin.^2 xdx}{x^2} = \frac{\pi}{2} \left\{ f(\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots) - f(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots) - \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}\beta \frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}{d\alpha} - \tfrac{1}{4}\beta_1 \frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}{d\alpha_1} - \tfrac{1}{4}\beta_2 \frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}{d\alpha_2} - \ldots \right\} \text{[5]} \quad \text{(XV)}$$

Nous voici parvenus à quelques théorèmes généraux, où les fonctions jouissent partout d'un dénominateur monôme. Passons à leur application à quelques exemples particuliers.

4. A cet effet il faut supposer diverses formes à $F(x)$, $F_1(x)$, $F_a(x)$, et puisque ces mêmes suppositions pourront servir tout de même dans la suite, occupons-nous en premier lieu des résultats pour les facteurs $\frac{1}{2}\left[F_i(xi) + F_i(-xi)\right]$ et $\frac{1}{2i}\left[F_i(xi) - F_i(-xi)\right]$ sous le signe d'intégration.

Soit $f(P, Q, R, \ldots) = P^p Q^q, R^r, \ldots$ et spécialement $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$, $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = 1$; alors on trouve successivement;

---

[4] Pour obtenir ces résultats il faut prendre $p=1$ dans l'intégrale Table 198, N°. 6, 7, où encore dans la dernière il faut faire $q=1$.

[5] On verra dans la suite que les fonctions $\frac{1}{2}\left[F(xi) + F(-xi)\right]$ et $\frac{1}{2i}\left[F(xi) - F(-xi)\right]$ jouissent des caractères des fonctions *Cosinus* et *Sinus*: et que par exemple les théorèmes (IV) et (V), (VI) et (VII), (VIII) et (IX) peuvent donner des résultats très-généraux quand on combine les intégrales, qui en résultent, par voie d'addition et de soustraction.

$$\frac{1}{2}\Big[F(xi)+F(-xi)\Big]=\frac{1}{2}[(1+e^{rxi})^s+(1+e^{-rxi})^s]=\frac{1}{2}[e^{\frac{1}{2}srxi}(e^{-\frac{1}{2}rxi}+e^{\frac{1}{2}rxi})^s+e^{-\frac{1}{2}srxi}(e^{\frac{1}{2}rxi}+$$

$$+e^{-\frac{1}{2}rxi})^s]=\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}rxi}+e^{-\frac{1}{2}rxi})^s(e^{\frac{1}{2}srxi}+e^{-\frac{1}{2}srxi})=\frac{1}{2}(2\,Cos.\,rx)^s(2\,Cos.\,srx)=$$

$$=2^s\,Cos.^s\tfrac{1}{2}rx.\,Cos.\tfrac{1}{2}srx,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (a)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F(xi)-F(-xi)\Big]=\frac{1}{2i}[(1+e^{rxi})^s-(1+e^{-rxi})^s]=\frac{1}{2i}(e^{\frac{1}{2}rxi}+e^{-\frac{1}{2}rxi})^s(e^{\frac{1}{2}srxi}-e^{-\frac{1}{2}srxi})=$$

$$=\frac{1}{2i}(2\,Cos.\,rx)^s(2i\,Sin.\tfrac{1}{2}srx)=2^s\,Cos.^s\tfrac{1}{2}rx.\,Sin.\tfrac{1}{2}srx,\ \ldots\ldots\ (b)$$

$$\frac{1}{2}\Big[F_1(xi)+F_1(-xi)\Big]=\frac{1}{2}[(1+e^{rxi})^s(1+e^{r_1xi})^{s_1}+(1+e^{-rxi})^s(1+e^{-r_1xi})^{s_1}]=\frac{1}{2}[e^{\frac{1}{2}srxi}$$

$$(e^{-\frac{1}{2}rxi}+e^{\frac{1}{2}rxi})^s e^{\frac{1}{2}s_1r_1xi}(e^{-\frac{1}{2}r_1xi}+e^{\frac{1}{2}r_1xi})^{s_1}+e^{-\frac{1}{2}srxi}(e^{\frac{1}{2}rxi}+e^{-\frac{1}{2}rxi})^s e^{-\frac{1}{2}s_1r_1xi}(e^{\frac{1}{2}r_1xi}+e^{-\frac{1}{2}r_1xi})^{s_1}]=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}rxi}+e^{-\frac{1}{2}rxi})^s(e^{\frac{1}{2}r_1xi}+e^{-\frac{1}{2}r_1xi})^{s_1}(e^{\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi}+e^{-\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi})=\frac{1}{2}(2\,Cos.\tfrac{1}{2}rx)^s$$

$$(2\,Cos.\tfrac{1}{2}r_1x)^{s_1}\,[2\,Cos.\{\tfrac{1}{2}(sr+s_1r_1)x\}]=2^{s+s_1}\,Cos.^s\tfrac{1}{2}rx.\,Cos.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x.\,Cos.\{\tfrac{1}{2}(sr+s_1r_1)x\},\ .\ (c)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_1(xi)-F_1(-xi)\Big]=\frac{1}{2i}[(1+e^{rxi})^s(1+e^{r_1xi})^{s_1}-(1+e^{-rxi})^s(1+e^{-r_1xi})^{s_1}]=$$

$$=\frac{1}{2i}(e^{\frac{1}{2}rxi}+e^{-\frac{1}{2}rxi})^s(e^{\frac{1}{2}r_1xi}+e^{-\frac{1}{2}r_1xi})^{s_1}(e^{\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi}-e^{-\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi})=$$

$$=\frac{1}{2i}(2\,Cos.\tfrac{1}{2}rx)^s(2\,Cos.\tfrac{1}{2}r_1x)^{s_1}\,[2i\,Sin.\{\tfrac{1}{2}(sr+s_1r_1)x\}]=2^{s+s_1}\,Cos.^s\tfrac{1}{2}rx.\,Cos.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x.$$

$$Sin.\{\tfrac{1}{2}(sr+s_1r_1)x\};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (d)$$

et tout de même:

$$\frac{1}{2}\Big[F_s(xi)+F_s(-xi)\Big]=2^{s+s_1+s_2+\cdots}\,Cos.^s\tfrac{1}{2}rx.\,Cos.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x.\,Cos.^{s_2}\tfrac{1}{2}r_2x\ldots Cos.\{\tfrac{1}{2}(sr+s_1r_1+s_2r_2+\ldots)x\},\ .\ (e)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_s(xi)-F_s(-xi)\Big]=2^{s+s_1+s_2+\cdots}\,Cos.^s\tfrac{1}{2}rx.\,Cos.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x.\,Cos.^{s_2}\tfrac{1}{2}r_2x\ldots Sin.\{\tfrac{1}{2}(sr+s_1r_1+s_2r_2+\ldots)x\}\ ..\ (f)$$

Mais pour la même forme de $f(x)$ les constantes α, β peuvent obtenir d'autres valeurs spéciales, et engendrer de telle sorte de nouvelles fonctions $F(xi)$. Que $f(x)$ garde donc la même forme, et que $\alpha=\alpha_1=\ldots\quad=1$, mais qu'on ait $\beta=\beta_1=\ldots=-1$. Dans ce cas les résultats se changent dans les suivants:

$$\frac{1}{2}\Big[F(xi)+F(-xi)\Big]=\frac{1}{2}[(1-e^{rxi})^s+(1-e^{-rxi})^s]=\frac{1}{2}[e^{\frac{1}{2}srxi}(e^{-\frac{1}{2}rxi}-e^{\frac{1}{2}rxi})^s+$$

$$+e^{-\frac{1}{2}srxi}(e^{\frac{1}{2}rxi}-e^{-\frac{1}{2}rxi})^s]=\frac{1}{2}[e^{\frac{1}{2}srxi}(-2i\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s+e^{-\frac{1}{2}srxi}(2i\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s]=$$

$$=\frac{1}{2}(2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s[e^{\frac{1}{2}srxi}e^{-\frac{1}{2}s\pi i}+e^{-\frac{1}{2}srxi}e^{\frac{1}{2}s\pi i}]=\frac{1}{2}(2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\{2\,Cos.(\tfrac{1}{2}srx-\tfrac{1}{2}s\pi)\}=$$

$$=2\,Sin.^s\tfrac{1}{2}rx.\,Cos.\{s(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}rx)\},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (g)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F(xi)-F(-xi)\Big]=\frac{1}{2i}[(1-e^{rxi})^s-(1-e^{-rxi})^s]=\frac{1}{2i}(2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\,(e^{\frac{1}{2}srxi}\,e^{-\frac{1}{2}s\pi i}-$$

$$-e^{-\frac{1}{2}srxi}\,e^{\frac{1}{2}s\pi i})=\frac{1}{2i}(2Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\,\{-2iSin.(\tfrac{1}{2}s\pi-\tfrac{1}{2}srx)\}=-2^sSin.^s\tfrac{1}{2}rx.Sin.\{s(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}rx)\};\quad.\quad(h)$$

où nous avons fait usage chaque fois des formules connues identiques

$$(i)^a=e^{\frac{1}{2}a\pi i},\quad(-i)^a=e^{-\frac{1}{2}a\pi i};$$

qui de même nous serviront dans les réductions suivantes:

$$\frac{1}{2}\Big[F_1(xi)+F_1(-xi)\Big]=\frac{1}{2}[(1-e^{rxi})^s\,(1-e^{r_1xi})^{s_1}+(1-e^{-rxi})^s\,(1-e^{-r_1xi})^{s_1}]=$$

$$=\frac{1}{2}[e^{\frac{1}{2}srxi}\,(e^{-\frac{1}{2}rxi}-e^{\frac{1}{2}rxi})^s\,e^{\frac{1}{2}s_1r_1xi}\,(e^{-\frac{1}{2}r_1xi}-e^{\frac{1}{2}r_1xi})^{s_1}+e^{-\frac{1}{2}srxi}\,(e^{\frac{1}{2}rxi}-e^{-\frac{1}{2}rxi})^s\,e^{-\frac{1}{2}s_1r_1xi}$$

$$(e^{\frac{1}{2}r_1xi}-e^{-\frac{1}{2}r_1xi})^{s_1}]=\frac{1}{2}[e^{\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi}\,(-2\,i\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\,(-2i\,Sin.\tfrac{1}{2}r_1x)^{s_1}+$$

$$+e^{-\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi}\,(2i\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\,(2i\,Sin.\tfrac{1}{2}r_1x)^{s_1}]=\frac{1}{2}(2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\,(2\,Sin.\tfrac{1}{2}r_1x)^{s_1}.$$

$$[e^{\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi}\,e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\,e^{-\frac{1}{2}s_1\pi i}+e^{-\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi}\,e^{\frac{1}{2}s\pi i}\,e^{\frac{1}{2}s_1\pi i}]=\frac{1}{2}(2Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\,(2\,Sin.\tfrac{1}{2}r_1x)^{s_1}.$$

$$[2Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi+\tfrac{1}{2}s_1\pi-\tfrac{1}{2}(sr+s_1r_1)x\}]=2^{s+s_1}Sin.^s\tfrac{1}{2}rx.Sin.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x.Cos.\{(s+s_1)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1)\tfrac{1}{2}x\},\ (i)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_1(xi)-F_1(-xi)\Big]=\frac{1}{2i}[(1-e^{rxi})^s\,(1-e^{r_1xi})^{s_1}-(1-e^{-rxi})^s\,(1-e^{-r_1xi})^{s_1}]=$$

$$=\frac{1}{2i}[e^{\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi}(-2iSin.\tfrac{1}{2}rx)^s(-2iSin.\tfrac{1}{2}r_1x)^{s_1}-e^{-\frac{1}{2}(sr+s_1r_1)xi}(2iSin.\tfrac{1}{2}rx)^s(2iSin.\tfrac{1}{2}r_1x)^{s_1}]=$$

$$=\frac{1}{2i}[(2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\,(2\,Sin.\tfrac{1}{2}r_1x)^{s_1}\ [-2iSin.\{\tfrac{1}{2}s\pi+\tfrac{1}{2}s_1\pi-\tfrac{1}{2}(sr+s_1r_1)x\}]=$$

$$=-2^{s+s_1}Sin.^s\tfrac{1}{2}rx.Sin.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x.Sin.\{(s+s_1)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1)\tfrac{1}{2}x\};\quad.\quad.\quad.\quad(k)$$

et encore analoguement:

$$\frac{1}{2}\Big[F_n(xi)+F_n(-xi)\Big]=2^{s+s_1+s_2+\dots}Sin.^s\tfrac{1}{2}rx.\ Sin.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x.\ Sin.^{s_2}\tfrac{1}{2}r_2x\dots Cos.\{(s+s_1+s_2+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$$

$$-(sr+s_1r_1+s_2r_2+\dots)\tfrac{1}{2}x\},\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(l)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_n(xi)-F_n(-xi)\Big]=-2^{s+s_1+s_2+\dots}Sin.^s\tfrac{1}{2}rx.Sin.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x.Sin.^{s_2}\tfrac{1}{2}r_2x\dots Sin.\{(s+s_1+s_2+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$$

$$-(sr+s_1r_1+s_2r_2+\dots)\tfrac{1}{2}x\}\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(m)$$

Mais dans la formule (γ) on peut encore prendre quelques β égaux à $+1$, quelques autres β égaux à -1: ainsi les fonctions contiendront, après le développement, tout aussi bien des facteurs $Cos.^s rx$ que des facteurs $Sin.^s rx$, outre le facteur *Cos.* ou *Sin.* de l'argument polynôme: et ainsi elles deviendront plus générales encore que les fonctions précédentes. Pour plus de clarté, nous écrirons p et q au lieu de r et s dans les facteurs $Cos.rx$, qui ainsi deviendront $Cos.^q px$; de sorte que pour

la fonction $\quad F_\delta(xi) = (1+e^{pxi})^q (1+e^{p_1xi})^{q_1} \ldots (1-e^{rxi})^s (1-e^{r_1xi})^{s_1} \ldots$ . . . . . . (x)
l'inspection des développements précédents nous conduira tout de suite aux formules, dont les parties analogues y ressemblent respectivement:

$$\frac{1}{2}\Big[F_\delta(xi)+F_\delta(-xi)\Big] = 2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots} Cos.^q \tfrac{1}{2}px.\ Cos.^{q_1}\tfrac{1}{2}p_1x \ldots Sin.^s \tfrac{1}{2}rx.\ Sin.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x \ldots$$
$$Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)\tfrac{1}{2}x\right\}, \quad . \ . \ . \quad (n)$$
$$\frac{1}{2i}\Big[F_\delta(xi)-F_\delta(-xi)\Big] = -2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots} Cos.^q \tfrac{1}{2}px.\ Cos.^{q_1}\tfrac{1}{2}p_1x \ldots Sin.^s \tfrac{1}{2}rx.\ Sin.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x \ldots$$
$$Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)\tfrac{1}{2}x\right\}.\ [6] \quad . \ . \quad (o)$$

5. Pour l'application de ces réductions aux théorèmes I à XV, nous avons, en donnant un indice aux f, correspondant à celui de F pour les formules (a) à (f): $f(\alpha)=1$, $f(\alpha+\beta)=2^s$, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}=s$; $f_1(\alpha,\alpha_1)=1$, $f_1(\alpha+\beta,\alpha_1+\beta_1)=2^{s+s_1}$, $\frac{df_1(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha}=s$, $\frac{df_1(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha_1}=s_1$; $f_\delta(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)=1$, $f_\delta(\alpha+\beta,\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots)=2^{s+s_1+s_2+\ldots}$, $\frac{df_\delta(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}{d\alpha}=s$, $\frac{df_\delta(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}{d\alpha_1}=s_1$, $\frac{df_\delta(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}{d\alpha_2}=s_2,\ldots$; par conséquent, lorsque nous doublons tous les r, pour éviter des fractions:

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin. srx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}}(2^s-1) \ldots (1), \qquad \int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1x.\ Sin.\left\{(sr+s_1r_1)x\right\}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{\pi}{2^{s+s_1+1}}(2^{s+s_1}-1) \ldots (2), \int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1}r_1x.\ Cos.^{s_2}r_2x \ldots Sin.\left\{(sr+s_1r_1+s_2r_2+\ldots)x\right\}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{\pi}{2^{s+s_1+s_2+\ldots}}(2^{s+s_1+s_2+\ldots}-1) \ldots (3), \qquad \int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos. srx.\ Sin. x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}} \ldots (4),$$
$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin. srx.\ Cos. x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}}(2^s-1) \ldots (5), \int_0^\infty Cos.^s rx. Cos.^{s_1} r_1x. Cos.\left\{(sr+s_1r_1)x\right\}. Sin. x\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{\pi}{2^{s+s_1+1}} \ldots (6), \int_0^\infty Cos.^s rx. Cos.^{s_1}r_1x. Sin.\left\{(sr+s_1r_1)x\right\}. Cos. x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+1}}(2^{s+s_1}-1) \ldots (7),$$
$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1}r_1x.\ Cos.^{s_2}r_2x \ldots Cos.\left\{(sr+s_1r_1+s_2r_2+\ldots)x\right\}. Sin. x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+s_2+\ldots+1}} \ldots (8),$$
$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1}r_1x.\ Cos.^{s_2}r_2x \ldots Sin.\left\{(sr+s_1r_1+s_2r_2+\ldots)x\right\}. Cos. x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+s_2+\ldots+1}}$$

---

[6] Il résulte de tous ces développements que, par les suppositions employées, les fonctions, en apparence encombrées d'imaginaires, en deviennent tout-à-fait exemptes par les transformations ultérieures. Et ainsi ce sont seulement de telles suppositions qu'on pourra employer avec avantage: aussi verra-t-on arriver la même chose dans la suite.

$(2^{s+s_1+s_2+\cdots}-1) \ldots (9)$, [7] $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin.\ srx.\ Sin.\ x\ \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}}(2^s-1) \ldots (12)$,
$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x.\ Sin.\{(sr+s_1 r_1)x\}.\ Sin.\ x\ \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+1}}(2^{s+s_1}-1) \ldots\ldots\ldots (13)$,
$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x.\ Cos.^{s_2} r_2 x \ldots Sin.\{(sr+s_1 r_1+s_2 r_2+\ldots)x\}.Sin.x\ \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+s_2+\ldots}+1}$
$(2^{s+s_1+s_2+\cdots}-1) \ldots (14)$, $\int_0^\infty Cos.^s rx.Sin.srx.Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2^{s+1}}(2^s - \tfrac{1}{4}s - 1) \ldots (15)$, $\int_0^\infty Cos.^s rx.$
$Cos.^{s_1} r_1 x.Sin.\{(sr+s_1 r_1)x\}.Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+1}}\{2^{s+s_1} - \tfrac{1}{4}(s+s_1) - 1\} \ldots (16)$, $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x$
$Cos.^{s_2} r_2 x \ldots\ Sin.\{(sr+s_1 r_1+s_2 r_2+\ldots)x\}.\ Sin.^2 x\ \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+s_2+\ldots+1}}\{2^{s+s_1+s_2+\cdots} -$
$- \tfrac{1}{4}(s+s_1+s_2+\ldots) - 1\} \ldots (17)$.

Avant d'aller plus loin, observons que toutes les intégrales, que l'on trouve au moyen de la supposition (β), se déduisent facilement de celles qui suivent de la supposition (γ): car lorsqu'on y restreint à deux le nombre tout-à-fait arbitraire des facteurs, on retombe justement sur la forme de la première fonction mentionnée. Dès-lors il convient de supprimer dorénavant les premières, afin de ne pas multiplier les résultats outre mesure.

Maintenant on obtient pour les formules (g), (h), (l) et (m): $f(\alpha) = 1 = f_a(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $f(\alpha+\beta) = 0 = f_a(\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots)$, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = s$, $\frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}{d\alpha} = s$, $\frac{df(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}{d\alpha_1} = s_1 \ldots$; donc, lorsqu'on prend ici encore des r doubles:
$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.\{s(\tfrac{1}{2}\pi - rx)\}\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2^{s+1}} \ldots (18)$, $\int_0^\infty Sin.^s rx.Sin.^{s_1} r_1 x \ldots Sin.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$
$-(sr+s_1 r_1+\ldots)x\}\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}} \ldots (19)$, $\int_0^\infty Sin.^s rx.Cos.\{s(\tfrac{1}{2}\pi - rx)\}.Sin.x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}} \ldots (20)$,
$\int_0^\infty Sin.^s rx.Sin.\{s(\tfrac{1}{2}\pi - rx)\}.Cos.x\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2^{s+1}} \ldots (21)$, $\int_0^\infty Sin.^s rx.Sin.^{s_1} r_1 x \ldots Cos.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$
$-(sr+s_1 r_1+\ldots)x\}.Sin.x\ \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}} \ldots (22)$, $\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots Sin.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$

---

[7] Des intégrales générales (8) et (9) on déduit par addition et par soustraction: $\int_0^\infty Cos.^s rx.Cos.^{s_1} r_1 x \ldots$ $Sin.\{(sr+s_1 r_1+\ldots+1)x\}\ \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ldots (10)$, $\int_0^\infty Cos.^s rx.Cos.^{s_1} r_1 x \ldots Sin.\{(sr+s_1 r_1+\ldots-1)x\}\frac{dx}{x} =$
$= \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots}}\{2^{s+s_1+\ldots-1} - 1\} \ldots (11)$.

$-(sr+s_1r_1+\dots)x\big\}.Cos.x\frac{dx}{x}=-\frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}}\dots$ (23), [8] $\int_0^\infty Sin.^s rx.Sin.\big\{s(\tfrac{1}{2}\pi-rx)\big\}.Sin.x\frac{dx}{x}=$
$=-\frac{\pi}{2^{s+1}}\dots$ (26), $\int_0^\infty Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\dots Sin.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\dots)x\big\}.Sin.x\frac{dx}{x}=$
$=-\frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}}\dots$ (27), $\int_0^\infty Sin.^s rx.Sin.\big\{s(\tfrac{1}{2}\pi-rx)\big\}.Sin.^2x\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{2^{s+3}}(s-4)$ ...... (28),
$\int_0^\infty Sin.^s rx.Sin.^{s_1}r_1x\dots Sin.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\dots)x\big\}.Sin.^2x\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+3}}(s+s_1+\dots-4)$.(29).

Enfin on a ici pour les développements (n) et (o), qui comportent seulement l'application des théorèmes III, VIII, IX, XII et XV: $f_a(\alpha.\alpha_1.\alpha_2,\dots)=1$, $f_a(\alpha+\beta.\alpha_1+\beta_1.\alpha_2+\beta_2,\dots)=0$, $\frac{df(\alpha,\alpha_1.\alpha_2,\dots)}{d\alpha}=s$, $\frac{df(\alpha,\alpha_1.\alpha_2,\dots)}{d\alpha_1}=s_1$, etc. Par suite on obtient les intégrales:

$\int_0^\infty Cos.^q px.Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.Sin.^{s_1}r_1x\dots Sin.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\big\}\frac{dx}{x}=$
$=-\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}\dots$ (30), $\int_0^\infty Cos.^q px.Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.Sin.^{s_1}r_1x\dots Cos.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$
$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\big\}.Sin.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}\dots$ (31), $\int_0^\infty Cos.^q px.$
$Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\dots\ Sin.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\big\}.Cos.x\frac{dx}{x}=$
$=-\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}\dots$(32), [9] $\int_0^\infty Cos.^q px.Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.Sin.^{s_1}r_1x\dots Sin.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$
$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\big\}.Sin.x\frac{dx}{x^2}=-\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}\dots$ (35), $\int_0^\infty Cos.^q px.$

---

[8] Par voie d'addition et de soustraction les intégrales (22) et (23) donnent: $\int_0^\infty Sin.^s rx.Sin.^{s_1}r_1x\dots$ $Sin.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\dots-1)x\big\}\frac{dx}{x}=0$ ...(24), $\int_0^\infty Sin.^s rx.Sin.^{s_1}r_1x\dots Sin.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$ $-(sr+s_1r_1+\dots+1)x\big\}\frac{dx}{x}=-\frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots}}\dots$ (25).

[9] La somme et la différence de ces deux intégrales sont: $\int_0^\infty Cos.^q px.Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.Sin.^{s_1}r_1x\dots$ $Sin.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots-1)x\big\}\frac{dx}{x}=0$ ... (33), $\int_0^\infty Cos.^q px.Cos.^{q_1}p_1x\dots$ $Sin.^s rx.Sin.^{s_1}r_1x\dots Sin.\big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+1)x\big\}\frac{dx}{x}=\frac{-\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots}}$(34).

$$Cos.^{q_1} p_1 x \ldots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}.Sin.^2 x\,\frac{dx}{x^3}=$$

$$=-\tfrac{1}{\pi}\,\frac{1+q+q_1+\ldots-s-s_1-\ldots}{2\;q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+3}\ldots(36).$$

Nous voyons que les résultats obtenus par cette méthode sont très-généraux, et que cependant les valeurs des intégrales précédentes ne dépendent pas des r qui s'y trouvent. Dans l'intégrale (1) la raison en est facile à saisir, parce que la substitution de $rx=y$ éliminerait cette constante r sans changer aucunément la forme de l'intégrale; mais pour les autres formules il n'y aurait pas lieu d'en donner a priori une telle raison: dans notre déduction cette perte de la constante r s'explique par le fait, que l'intégration des séries A, B, C etc. l'élimine tout de suite. Encore y a-t-il à faire ici une autre observation, qui vaut évidemment pour toute intégrale définie, prise entre des limites 0 et p, et à dénominateur algébrique monôme et à fonctions trigonométriques au numérateur, savoir, que le numérateur doit contenir au moins autant de facteurs, s'annulant pour la valeur zéro de x, qu'il y a de facteurs x au dénominateur: or, dans le cas contraire la valeur de l'intégrale définie deviendrait infinie. On voit que cette condition se trouve remplie partout.

6. On peut encore différentier quelques-unes de ces intégrales par rapport à la constante s, et c'est ainsi que nous obtiendrons des résultats intéressants, sauf d'annuler ensuite cette constante. A cet effet posons les intégrales en question sous les formes générales:

$\int_0^\infty Cos.^s rx. Cos. srx. f(x)\,dx$, $\int_0^\infty Cos.^s rx. Sin. srx. f(x)\,dx$, $\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx). f(x)\,dx$,

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx). f(x)\,dx$, où maintenant $f(x)$ est indépendante de s. Différentions par rapport à cette constante, et annulons-la après coup, nous trouverons:

$$\int_0^\infty \left\{Cos.^s rx.\, l Cos. rx.\, Cos. srx - rx\, Sin. srx. Cos.^s rx\right\} f(x)\,dx, \text{ d'où } \int_0^\infty l Cos. rx. f(x)\,dx; \quad \ldots \quad (\lambda)$$

$$\int_0^\infty \left\{Cos.^s rx.\, l Cos. rx.\, Sin. srx + rx\, Cos. srx. Cos.^s rx\right\} f(x)\,dx, \text{ d'où } \int_0^\infty rx\, f(x)\,dx; \quad \ldots \quad (\lambda')$$

$$\int_0^\infty \left\{Sin.^s rx.\, l Sin. rx. Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)+(\tfrac{1}{2}\pi - rx)\, Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx). Sin.^s rx\right\} f(x)\,dx, \text{ d'où } \int_0^\infty l\, Sin. rx. f(x)\,dx; \quad (\mu)$$

$$\int_0^\infty \left\{Sin.^s rx.\, l Sin. rx. Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)-(\tfrac{1}{2}\pi - rx)\, Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx). Sin.^s rx\right\} f(x)\,dx, \text{ d'où } \int_0^\infty (rx-\tfrac{1}{2}\pi)\, f(x)\,dx. \quad (\mu')$$

Or, la deuxième et la quatrième de ces équations nous mèneraient en général à des résultats fautifs, puisqu'elles introduiraient un facteur x, pour lequel les

développements suivant le théorème de TAYLOR cesseraient d'être convergonts. Mais par l'application permise de la première et de la troisième de ces équations, les intégrales (4) et (20) nous donneront:

$$\int_0^\infty l\,Cos.\,rx.\ Sin.\,x\,\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2}\,l\,2\ \ldots\ (37),\qquad \int_0^\infty l\,Sin.\,rx.\ Sin.\,x\,\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2}\,l\,2\ \ldots\ (38).$$

dont la différence et la somme sont: $\int_0^\infty l\,tang.\,rx.\ Sin.\,x\,\frac{dx}{x} = 0\ \ldots\ (39)$ et $\int_0^\infty l\,(Sin.\,rx\ Cos.\,rx).\ Sin.\,x\,\frac{dx}{x} = -\pi\,l\,2.$ Cette dernière pourtant ne donne rien de nouveau, puisque en y ajoutant le produit de $l\,2$ par l'intégrale (5) du N°. 3 on retrouve la formule (38).

7. Discutons maintenant la forme $f(P, Q,\ldots) = e^{sP}\,e^{s_1 Q}\ldots$, et faisons-y $\alpha = \alpha_1 = \ldots = 0$, $\beta = \beta_1 = \ldots = 1$; alors nous trouvons:

$$\frac{1}{2}\Big[F(xi) + F(-xi)\Big] = \frac{1}{2}\left(e^{se^{rxi}} + e^{se^{-rxi}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{s(Cos.\,rx + i\,Sin.\,rx)} + e^{s(Cos.\,rx - i\,Sin.\,rx)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\,e^{s\,Cos.\,rx}\left(e^{si\,Sin.\,rx} + e^{-si\,Sin.\,rx}\right) = e^{s\,Cos.\,rx}\,Cos.\,(s\,Sin.\,rx),\ \ldots\ldots\ldots\ (p)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F(xi) - F(-xi)\Big] = \frac{1}{2i}\left(e^{se^{rxi}} - e^{se^{-rxi}}\right) = \frac{1}{2i}\,e^{s\,Cos.\,rx}\left(e^{si\,Sin.\,rx} - e^{-si\,Sin.\,rx}\right) =$$
$$= e^{s\,Cos.\,rx}\,Sin.\,(s\,Sin.\,rx),\ \ldots\ldots\ldots\ (q)$$

$$\frac{1}{2}\Big[F_1(xi) + F_1(-xi)\Big] = \frac{1}{2}\left(e^{se^{rxi} + s_1 e^{r_1 xi}} + e^{se^{-rxi} + s_1 e^{-r_1 xi}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{s(Cos.\,rx + i\,Sin.\,rx)}\right.$$
$$\left.e^{s_1(Cos.\,r_1 x + i\,Sin.\,r_1 x)} + e^{s(Cos.\,rx - i\,Sin.\,rx)}\,e^{s_1(Cos.\,r_1 x - i\,Sin.\,r_1 x)}\right) = \frac{1}{2}\,e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x}$$
$$\left(e^{i(s\,Sin.\,rx + s_1 Sin.\,r_1 x)} + e^{-i(s\,Sin.\,rx + s_1 Sin.\,r_1 x)}\right) = e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x}\,Cos.\,(s\,Sin.\,rx + s_1\,Sin.\,r_1 x),\ .\ (r)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_1(xi) - F_1(-xi)\Big] = \frac{1}{2i}\left(e^{se^{rxi} + s_1 e^{r_1 xi}} - e^{se^{-rxi} + s_1 e^{-r_1 xi}}\right) = \frac{1}{2i}\,e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x}$$
$$\left(e^{i(s\,Sin.\,rx + s_1 Sin.\,r_1 x)} - e^{-i(s\,Sin.\,rx + s_1 Sin.\,r_1 x)}\right) = e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x}\,Sin.\,(s\,Sin.\,rx + s_1\,Sin.\,r_1 x);\ .\ (s)$$

et de la même manière:

$$\frac{1}{2}\Big[F_a(xi) + F_a(-xi)\Big] = e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x + \ldots}\,Cos.\,(s\,Sin.\,rx + s_1\,Sin.\,r_1 x + \ldots),\ \ldots\ (t)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_a(xi) - F_a(-xi)\Big] = e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x + \ldots}\,Sin.\,(s\,Sin.\,rx + s_1\,Sin.\,r_1 x + \ldots)\ \ldots\ (u)$$

8. Ne nous servons pas maintenant des développements (r) et (s), comme étant de nouveau compris dans les formules plus générales, à un nombre illimité de facteurs, (t) et (u), — par conséquent les théorèmes sur la fonction F_1 ne nous seront plus utiles — alors nous obtiendrons ici, au moyen des théorèmes I à XV

et en nous aidant des valeurs spéciales $f(\alpha)=1$, $f(\alpha+\beta)=e^{s}$, $f_{s}(\alpha,\alpha_1,\ldots)=1$, $f_{s}(\alpha+\beta,\alpha_1+\beta_1,\ldots)=e^{s+s_1+\ldots}$, $\frac{df_{s}(\alpha,\alpha_1,\ldots)}{d\alpha}=s$, $\frac{df(\alpha,\alpha_1,\ldots)}{d\alpha_1}=s_1$, etc.:

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Sin.(s Sin.rx)\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(e^{s}-1)$, (T.392, N°.14), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx+s_1 Cos.r_1x+\ldots} Sin.(s Sin.rx+ +s_1 Sin.r_1x+\ldots)\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(e^{s+s_1+\ldots}-1)$ ... (40), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Cos.(s Sin.rx).Sin.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}$ ... (41), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx+s_1 Cos.r_1x+\ldots} Cos.(s Sin.rx+s_1 Sin.r_1x+\ldots).Sin.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}$ ... (42), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Sin.(s Sin.rx).Cos.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(e^{s}-1)$ ... (43), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx+s_1 Cos.r_1x+\ldots} Sin.(s Sin.rx+s_1 Sin.r_1x+\ldots). Cos.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(e^{s+s_1+\ldots}-1)$ ... (44), [10] $\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Sin.(s Sin.rx).Sin.x\frac{dx}{x^2}= =\frac{\pi}{2}(e^{s}-1)$ ... (47), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx+s_1 Cos.r_1x+\ldots} Sin.(s Sin.rx+s Sin.rx+\ldots).Sin.x\frac{dx}{x^2}= =\frac{\pi}{2}(e^{s+s_1+\ldots}-1)$ ... (48), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Sin.(s Sin.rx).Sin.^2x\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{2}(e^{s}-1-\frac{1}{4}s)$ ... (49), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx+s_1 Cos.r_1x+\ldots} Sin.(s Sin.rx+s_1 Sin.r_1x+\ldots).Sin.^2x\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{2}\{e^{s+s_1+\ldots}-1- -\frac{1}{4}(s+s_1+\ldots)\}$ ... (50).

9. La différentiation par rapport à la constante s étant permise ici, vu qu'elle n'introduit aucun facteur, qui pourrait donner lieu à une discontinuité de l'intégrale, on aura pour les intégrales de forme générale

$$\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Cos.(s Sin.rx).f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{s Cos.rx} Sin.(s Sin.rx).f(x)\,dx,$$

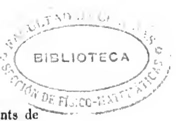
après la différentiation par rapport à s:

$$\int_0^\infty e^{s Cos.rx}\{Cos.rx.Cos.(s Sin.rx)-Sin.(s Sin.rx).Sin.rx\}f(x)\,dx=\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Cos.(s Sin.rx+rx).f(x)\,dx, \ldots \quad (\gamma)$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos.rx}\{Cos.rx.Sin.(s Sin.rx)+Cos.(s Sin.rx).Sin.rx\}f(x)\,dx=\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Sin.(s Sin.rx+rx).f(x)\,dx \ldots \quad (\delta)$$

---

[10] D'où par l'addition et la soustraction des résultats: $\int_0^\infty e^{s Cos.rx+s_1 Cos.r_1x+\ldots} Sin.(s Sin.rx+ +s_1 Sin.r_1x+\ldots+x)\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}e^{s+s_1+\ldots}$ ... (45), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx+s_1 Cos.r_1x+\ldots} Sin.(s Sin.rx+s_1 Sin.r_1x+\ldots-x)\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(e^{s+s_1+\ldots}-2)$ ... (46).



d'où l'on déduit ensuite pour le cas de plusieurs facteurs $e^{s_1 Cos. r_1 x}$, différents de celui qui dépend de s, — et lorsqu'on fait évanouir cette constante s:

$$\int_0^\infty e^{s_1 Cos. r_1 x + \dots} Cos.(s_1 Sin. r_1 x + \dots + rx).f(x)dx \;\dots\; (o), \quad \int_0^\infty e^{s_1 Cos. r_1 x + \dots} Sin.(s_1 Sin. r_1 x + \dots + rx).f(x)dx \;\dots\; (n).$$

C'est-à-dire que l'évanouissement de s élimine la constante r, qui l'accompagne, tant de l'exponentielle que de l'argument polynôme sous le signe *Sin.* ou *Cos.*, puisque les termes $s Cos. rx$ et $s Sin. rx$ s'annulent avec s: mais que néanmoins le terme supplémentaire rx sous ces mêmes signes trigonométriques y reste. Par conséquent dans les intégrales (o) et (n) la constante r de rx peut se trouver ou non parmi les r de l'exponentielle, arbitrairement.

Ainsi les intégrales du dernier Numéro donneront:

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx} Sin.(s Sin. rx + r_a x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} e^s \;\dots\; (51), \quad \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \dots} Sin. (s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \dots + r_a x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} e^{s + s_1 + \dots} \;\dots\; (52),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx} Cos.(s Sin. rx + r_a x). Sin. x \frac{dx}{x} = 0 \;\dots\; (53), \quad \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \dots} Cos.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \dots + r_a x). Sin. x \frac{dx}{x} = 0 \;\dots\; (54),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx} Sin.(s Sin. rx + r_a x). Cos. x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} e^s \;\dots\; (55), \quad \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \dots} Sin.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \dots + r_a x). Cos. x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} e^{s + s_1 + \dots} \;\dots\; (56),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx} Sin. (s Sin. rx + r_a x). Sin. x \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} e^s \;\dots\dots\; (57),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \dots} Sin.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \dots + r_a x). Sin. x \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} e^{s + s_1 + \dots} \;\dots\dots\dots\; (58),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx} Sin. (s Sin. rx + r_a x). Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2} (e^s - \tfrac{1}{4}) \;\dots\; (59), \quad \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \dots} Sin. (s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \dots + r_a x). Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2} (e^{s + s_1 + \dots} - \tfrac{1}{4}) \;\dots\dots\dots\; (60);$$

et encore celles de la note 10, toutes les deux:

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \dots} Sin. \{ s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \dots \pm (r_a \pm 1)x \}. Sin. x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} e^{s + s_1 + \dots}.$$

Mais la discussion précédente nous a prouvé que le r_a dans le terme de l'argument polynôme sous la fonction trigonométrique peut aussi ne pas dépendre des constantes r qu'on trouve dans l'exponentielle: d'après cette remarque la dernière intégrale ne diffère aucunement de l'intégrale (52) que nous avons trouvée plus haut, puisque r_a est tout aussi arbitraire que $r_a \pm 1$.

Remarquons encore que pour s zéro, les intégrales (51), (53), (55), (57) et (59) se réduisent aux intégrales T. 194, N°. 5, T. 195, N°. 2, T. 195, N°. 3, T. 198, N°. 2 et T. 198, N°. 6.

10. Faisons ensuite $f(P, Q, \ldots R, S, \ldots) = P^{s}. Q^{s_1} \ldots e^{tR}. e^{t_1 S} \ldots$, combinaison des deux suppositions précédentes, où auprès de l'exponentielle nous écrirons u au lieu de r: commençons par la fonction (β), en y prenant $\alpha = 1 = \beta = \beta_1, \alpha_1 = 0$; alors il est:

$$\frac{1}{2}\Big[F_1(xi) + F_1(-xi)\Big] = \frac{1}{2}\left\{(1 + e^{rxi})^s e^{te^{uxi}} + (1 + e^{-rxi})^s e^{te^{-uxi}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^{\frac{1}{2}srxi}(e^{-\frac{1}{2}rxi} + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{1}{2}rxi})^s e^{t(Cos.ux + iSin.ux)} + e^{-\frac{1}{2}srxi}(e^{\frac{1}{2}rxi} + e^{-\frac{1}{2}rxi})^s e^{t(Cos.ux - iSin.ux)}\right\} = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}rxi} +$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}rxi})^s e^{tCos.ux}(e^{\frac{1}{2}srxi + tiSin.ux} + e^{-\frac{1}{2}srxi - tiSin.ux}) = 2^s Cos.^s \tfrac{1}{2}rx.\ e^{tCos.ux}\ Cos.(\tfrac{1}{2}srx +$$

$$+ t\,Sin.ux), \quad \ldots \ldots \quad (v)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_1(xi) - F_1(-xi)\Big] = \frac{1}{2i}(e^{\frac{1}{2}rxi} + e^{-\frac{1}{2}rxi})^s\ e^{tCos.ux}\ (e^{\frac{1}{2}srxi + tiSin.ux} - e^{-\frac{1}{2}srxi - tiSin.ux}) =$$

$$= 2^s Cos.^s \tfrac{1}{2}rx.\ e^{tCos.ux}\ Sin.(\tfrac{1}{2}srx + t\,Sin.ux). \quad \ldots \ldots \quad (w)$$

Quant aux fonctions (γ), lorsqu'on introduit de même les constantes t et u, on trouvera pour la fonction:

$$F_c(\alpha + \beta\, e^{rx},\ \alpha_1 + \beta_1\, e^{r_1 x}, \ldots,\ {}_1\alpha + {}_1\beta\, e^{ux},\ {}_1\alpha_1 + {}_1\beta_1\, e^{u_1 x}, \ldots), \quad \ldots \quad (\gamma)$$

— où d'abord il faut faire $\alpha = \alpha_1 = \ldots = 1 = \beta = \beta_1 = \ldots,\ {}_1\alpha = {}_1\alpha_1 = \ldots = 0$. ${}_1\beta = {}_1\beta_1 = \ldots = 1$, — absolument de la même manière:

$$\frac{1}{2}\Big[F_c(xi) + F_c(-xi)\Big] = 2^{s+s_1+\ldots}\quad Cos.^s \tfrac{1}{2}rx.\quad Cos.^{s_1} \tfrac{1}{2}r_1 x \ldots \quad e^{tCos.ux + t_1 Cos.u_1 x + \ldots}$$

$$Cos.\left\{(sr + s_1 r_1 + \ldots)\tfrac{1}{2}x + tSin.ux + t_1 Sin.u_1 x + \ldots\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (x)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_c(xi) - F_c(-xi)\Big] = 2^{s+s_1+\ldots}\quad Cos.^s \tfrac{1}{2}rx.\quad Cos.^{s_1} \tfrac{1}{2}r_1 x \ldots \quad e^{tCos.ux + t_1 Cos.u_1 x + \ldots}$$

$$Sin.\left\{(sr + s_1 r_1 + \ldots)\tfrac{1}{2}x + tSin.ux + t_1 Sin.u_1 x + \ldots\right\}. \quad \ldots \ldots \quad (y)$$

A présent, tout comme au N°. 4, gardant la même forme de f, ainsi que les valeurs spéciales pour les ${}_1\alpha$ et les ${}_1\beta$, supposons $\alpha = \alpha_1 = \ldots = 1, \beta = \beta_1 = \ldots = -1$; alors nous trouvons pour les fonctions (β):

$$\frac{1}{2}\Big[F_c(xi) + F_c(-xi)\Big] = \frac{1}{2}\left\{(1 - e^{rxi})^s e^{te^{uxi}} + (1 - e^{-rxi})^s e^{te^{-uxi}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^{\frac{1}{2}srxi}(e^{-\frac{1}{2}rxi} - \right.$$

$$\left. - e^{\frac{1}{2}rxi})^s\ e^{t(Cos.ux + i\,Sin.ux)} + e^{-\frac{1}{2}srxi}\ (e^{\frac{1}{2}rxi} - e^{-\frac{1}{2}rxi})^s\ e^{t(Cos.ux - i\,Sin.ux)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s.\ e^{tCos.ux}\left\{e^{\frac{1}{2}srxi - \frac{1}{2}s\pi i}\ e^{ti\,Sin.ux} + e^{-\frac{1}{2}srxi + \frac{1}{2}s\pi i}\ e^{-ti\,Sin.ux}\right\} =$$

$$= 2^s Sin.^s \tfrac{1}{2}rx.\ e^{tCos.ux}\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - \tfrac{1}{2}srx - t\,Sin.ux), \quad \ldots \ldots \quad (z)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_c(xi) - F_c(-xi)\Big] = (2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s.\ e^{tCos.ux}\left\{e^{\frac{1}{2}srxi - \frac{1}{2}s\pi i}\ e^{ti\,Sin.ux} - e^{-\frac{1}{2}srxi + \frac{1}{2}s\pi i}\right.$$

$$\left. e^{-ti\,Sin.ux}\right\} = -\ 2^s Sin.^s \tfrac{1}{2}rx.\ e^{tCos.ux}\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - \tfrac{1}{2}srx - t\,Sin.ux), \quad \ldots \quad (aa)$$

(où dans la réduction nous avons fait usage des formules connues $(i)^a = e^{\frac{1}{2}a\pi i}$, $(-1)^a = e^{-\frac{1}{2}a\pi i}$); équations, qui pour le cas général de la forme (ϵ) nous mènent aux résultats suivants:

$$\frac{1}{2}\Big[F_\epsilon(xi)+F_\epsilon(-xi)\Big] = 2^{s+s_1+\dots} Sin.^s \tfrac{1}{2}rx.\, Sin.^{s_1} \tfrac{1}{2}r_1x \dots e^{t\,Cos.\,ux + t_1 Cos.\,u_1x+\dots} Cos.\Big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)\tfrac{1}{2}x - t\,Sin.\,ux - t_1 Sin.\,u_1x - \dots\Big\}, \quad (ab)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_\epsilon(xi)-F_\epsilon(-xi)\Big] = -\,2^{s+s_1+\dots}\, Sin.^s \tfrac{1}{2}rx.\; Sin.^{s_1} \tfrac{1}{2}r_1x \dots\; e^{t\,Cos.\,ux+t_1 Cos.\,u_1x+\dots}\, Sin.\Big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)\tfrac{1}{2}x - t\,Sin.\,ux - t_1 Sin.\,u_1x - \dots\Big\}. \quad (ac)$$

Encore peut-on combiner les deux dernières suppositions; ainsi la forme générale de la fonction deviendra:

$$F_d(\alpha_1+\beta_1 e^{px},\dots\; {}_1\alpha+{}_1\beta e^{rx},\dots,\; {}_1\alpha'+{}_1\beta' e^{ux},\dots), \quad (\sigma)$$

où il faut prendre $\alpha_1 = \dots = \beta_1 = \dots = {}_1\alpha = \dots = {}_1\beta' = \dots = 1$, ${}_1\beta = \dots = -1$, ${}_1\alpha' = \dots = 0$, pour la faire rentrer dans les suppositions précédentes; lorsque encore on fait correspondre les puissances q, s, t aux coefficients p, r, u, on aura enfin:

$$\frac{1}{2}\Big[F_d(xi)+F_d(-xi)\Big] = 2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots} Cos.^q \tfrac{1}{2}px.\; Cos.^{q_1} \tfrac{1}{2}p_1x \dots\; Sin.^s \tfrac{1}{2}rx.\; Sin.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x \dots\; e^{t\,Cos.\,ux+t_1 Cos.\,u_1x+\dots} Cos.\Big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)\tfrac{1}{2}x - t\,Sin.\,ux - t_1 Sin.\,u_1x - \dots\Big\}, \quad (ad)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_d(xi)-F_d(-xi)\Big] = -\,2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots} Cos.^q \tfrac{1}{2}px.\; Cos.^{q_1}\tfrac{1}{2}p_1x \dots\; Sin.^s\tfrac{1}{2}rx.\; Sin.^{s_1}\tfrac{1}{2}r_1x \dots\; e^{t\,Cos.\,ux+t_1 Cos.\,u_1x+\dots} Sin.\Big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)\tfrac{1}{2}x - t\,Sin.\,ux - t_1 Sin.\,u_1x - \dots\Big\}. \quad (ae)$$

11. Lorsque nous en venons aux applications, il faut observer que nous avons à faire ici à deux fonctions distinctes pour le moins, de sorte que les théorèmes (I), (IV), (V), (X) et (XIII) tombent ici hors d'usage. Pour les autres nous avons pour l'emploi des formules (v) à (y), $f(\alpha,\alpha_1,\dots)=1$, $f(\alpha+\beta,\alpha_1+\beta_1)=2^s e^t$, $f(\alpha+\beta,\alpha_1+\beta_1,\dots)=2^{s+s_1+\dots}e^{t+t_1+\dots}$, $\frac{d\,f(\alpha,\alpha_1)}{d\alpha}=s$, $\frac{d\,f(\alpha,\alpha_1)}{d\,{}_1\alpha}=t$, $\frac{df(\alpha,\alpha_1,\dots)}{d\alpha}=s$, $\frac{df(\alpha,\alpha_1,\dots)}{d\,{}_1\alpha}=t$, etc: doublons ici les r pour éviter des fractions; dès-lors il viendra:

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.\,ux}\, Cos.^s rx.\; Sin.(srx+t\,Sin.\,ux)\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}e^t \dots (61),\quad \int_0^\infty e^{t\,Cos.\,ux+t_1Cos.\,u_1x+\dots}\, Cos.^s rx.\; Cos.^{s_1} r_1x \dots Sin.\Big\{(sr+s_1r_1+\dots)x + t\,Sin.\,ux + t_1 Sin.\,u_1x+\dots\Big\}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}e^{t+t_1+\dots} \dots (62),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.\,ux}\, Cos.^s rx.\, Cos.(srx+t\,Sin.\,ux).\, Sin.\,x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}} \dots (63),\quad \int_0^\infty e^{t\,Cos.\,ux}\, Cos.^s rx.\, Sin.(srx+t\,Sin.\,ux).\, Cos.\,x\frac{dx}{x} =$$

$=\frac{\pi}{2^{s+1}}(2^s e^t-1)$ ... (64), [11] $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1 x \dots Cos.\{(sr+s_1r_1+\dots)x+tSin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\}.Sin.x\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}}$ ... (67), $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1 x \dots\ Sin.\{(sr+s_1r_1+\dots)x+t\,Sin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\}.\ Cos.x\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}}\{2^{s+s_1+\dots}e^{t+t_1+\dots}-1\}$ ...(68), [12] $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux} Cos.^s rx.Sin.\{srx+t\,Sin.ux\}.\ Sin.x\,\frac{dx}{x^2}=\frac{\pi}{2^{s+1}}(2^s e^t-1)$ ... (71), $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \dots Sin.\{(sr+s_1r_1+\dots)x+tSin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\}.Sin.x\,\frac{dx}{x^2}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}}(2^{s+s_1+\dots}e^{t+t_1+\dots}-1)$ ... (72), $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux} Cos.^s rx.\ Sin.(srx+tSin.ux).\ Sin.^2 x\,\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{2^{s+1}}\{2^s e^t-\frac{1}{4}(s+t)-1\}$ ... (73), $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \dots Sin.\{(sr+s_1r_1+\dots)x+tSin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\}.Sin.^2 x\,\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}}\{2^{s+s_1+\dots}e^{t+t_1+\dots}-\frac{1}{4}(s+s_1+\dots+t+t_1+\dots)-1\}$ ... (74).

Lorsqu'on veut faire l'application de nos théorèmes aux développements (*z*) à (*ae*) toutes les valeurs spéciales précédentes restent les mêmes, sauf la valeur de $f(\alpha+\beta,\alpha_1+\beta_1,\dots)$, qui ici s'annule toujours par l'influence d'un facteur $\alpha+\beta=1+(-1)=0$, ou de plusieurs facteurs de ce genre. Eu égard à ces observations nous trouverons successivement, en doublant les r et les p pour la même raison qu'auparavant:

---

[11] Par voie d'addition et de soustraction on déduit de ces intégrales: $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux} Cos.^s rx.\ Sin.\{(sr+1)x+t\,Sin.ux\}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}e^t$ ... (65), $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux} Cos.^s rx.\ Sin.\{(sr-1)x+t\,Sin.ux\}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2^s}(2^{s-1}e^t-1)$ ... (66).

[12] La somme et la différence de ces deux dernières formules donnent: $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \dots Sin.\{(sr+s_1r_1+\dots+1)x+tSin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}e^{t+t_1+\dots}$ ... (69). $\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.Cos.^{s_1} r_1 x+\dots Sin.\{(sr+s_1r_1+\dots-1)x+tSin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots}}\{2^{s+s_1+\dots-1}e^{t+t_1+\dots}-1\}$ ... (70).

$\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux}\,\text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx - t\,\text{Sin.}\,ux)\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}}$ ... (75), $\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux + t_1\,\text{Cos.}\,u_1x + \dots}$
$\text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}^{s_1} r_1 x \dots \text{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\text{Sin.}\,ux - t_1\,\text{Sin.}\,u_1x - \dots\}\frac{dx}{x} =$
$= \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}}$ ... (76), $\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux + t_1\,\text{Cos.}\,u_1x + \dots}\,\text{Cos.}^q px.\ \text{Cos.}^{q_1} p_1x \dots \text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}^{s_1} r_1 x \dots$
$\text{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\text{Sin.}\,ux - t_1\,\text{Sin.}\,u_1x - \dots\}\frac{dx}{x} =$
$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}$ ... (77), $\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux}\,\text{Sin.}^s rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx - t\,\text{Sin.}\,ux).\,\text{Sin.}x\,\frac{dx}{x} =$
$= \frac{\pi}{2^{s+1}}$ ... (78), $\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux}\,\text{Sin.}^s rx.\,\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx - t\,\text{Sin.}\,ux).\text{Cos.}x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}}$ ... (79), [13]
$\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux + t_1\,\text{Cos.}\,u_1x + \dots}\,\text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}^{s_1} r_1x \dots \text{Cos.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\text{Sin.}\,ux -$
$- t_1\,\text{Sin.}\,u_1x - \dots\}.\,\text{Sin.}x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}}$ ... (82), $\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux + t_1\,\text{Cos.}\,u_1x + \dots}\,\text{Sin.}^s rx.\text{Sin.}^{s_1} r_1x \dots$
$\text{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\text{Sin.}\,ux - t_1\,\text{Sin.}\,u_1x - \dots\}.\text{Cos.}x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}}$.(83),[14]
$\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux + t_1\,\text{Cos.}\,u_1x + \dots}\,\text{Cos.}^q px.\text{Cos.}^{q_1} p_1x \dots \text{Sin.}^s rx.\text{Sin.}^{s_1} r_1x \dots \text{Cos.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+$
$+ sr + s_1r_1 + \dots)x - t\,\text{Sin.}\,ux - t_1\,\text{Sin.}\,u_1x - \dots\}.\ \text{Sin.}\,x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}$ ... (86),
$\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux + t_1\,\text{Cos.}\,u_1x + \dots}\,\text{Cos.}^q px.\text{Cos.}^{q_1} p_1x \dots \text{Sin.}^s rx.\text{Sin.}^{s_1} r_1x \dots \text{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+$

---

[13] De ces intégrales on déduit par addition et par soustraction: $\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux}\,\text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}\{\tfrac{1}{2}s\pi -$
$-(sr+1)x - t\,\text{Sin.}\,ux\}\frac{dx}{x} = 0$ ... (80), $\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux}\,\text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr-1)x - t\,\text{Sin.}\,ux\}\frac{dx}{x} =$
$= \frac{\pi}{2^s}$ ... (81).

[14] D'où, lorsqu'on prend la somme et la différence de ces intégrales: $\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux + t_1\,\text{Cos.}\,u_1x + \dots}$
$\text{Sin.}^s rx.\text{Sin.}^{s_1} r_1x \dots \text{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots+1)x - t\,\text{Sin.}\,ux - t_1\,\text{Sin.}\,u_1x - \dots\}\frac{dx}{x} = 0$ ... (84),
$\int_0^\infty e^{t\,\text{Cos.}\,ux + t_1\,\text{Cos.}\,u_1x + \dots}\,\text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}^{s_1} r_1x \dots \text{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots-1)x - t\,\text{Sin.}\,ux -$
$- t_1\,\text{Sin.}\,u_1x - \dots\}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots}}$ ... (85).

$$+ sr+s_1r_1+\dots)x - t\,Sin.ux - t_1\,Sin.u_1x - \dots\}.\,Sin.x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}} \dots (87),$$ [15]

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux}\,Sin.^s rx\,Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx - t\,Sin.ux).Sin.x\,\frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}} \dots (90),\quad \int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1Cos.u_1x+\dots}$$

$$Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1} r_1x \dots Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)x - t\,Sin.ux - t_1\,Sin.u_1x - \dots)\}.\,Sin.x\,\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}} \dots (91),\quad \int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1Cos.u_1x+\dots}\,Cos.^q px.\,Cos.^{q_1} p_1x \dots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1} r_1x \dots$$

$$Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t\,Sin.ux - t_1\,Sin.u_1x - \dots\}.\,Sin.x\,\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}} \dots (92),\quad \int_0^\infty e^{t\,Cos.ux}\,Sin.^s rx.\,Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx - t\,Sin.ux).\,Sin.^2x\,\frac{dx}{x^3} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+3}}(4+s+t) \dots (93),\quad \int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1Cos.u_1x+\dots}\,Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1} r_1x \dots Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi -$$

$$-(sr+s_1r_1+\dots)x - t\,Sin.ux - t_1\,Sin.u_1x - \dots\}.\,Sin.^2x\,\frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+3}}(4+s+s_1+\dots+t+t_1+\dots) . (94),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1Cos.u_1x+\dots}\,Cos.^q px.\,Cos.^{q_1} p_1x \dots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1} r_1x \dots Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi -$$

$$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t\,Sin.ux - t_1\,Sin.u_1x - \dots\}.\,Sin.^2x\,\frac{dx}{x^3} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+3}}(4+q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+t+t_1+\dots) \dots (95).$$

Il faut remarquer ici que les formules générales (77), (86), (87), (92) et (95) ne comprennent pas les intégrales (61) à (74) lors de l'évanouissement de tous les s: or, il est aisé de déduire la raison de ce paradoxe. Dans les formules (75) à (95) la présence d'un ou de plusieurs facteurs $Sin.^s rx$ faisait évanouir la fonction correspondante $f(\alpha+\beta)$ dans la valeur de cette intégrale: mais aussitôt que ces facteurs $Sin.^s rx$ disparaissent tous, la fonction $f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1, \dots)$ peut de nouveau acquérir des valeurs différentes de zéro, et évidemment cela a lieu dans les premières formules (61) à (74), qui par suite diffèrent des intégrales générales.

[15] La combinaison de ces intégrales par la voie d'addition et de soustraction fournit les suivantes:

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1Cos.u_1x+\dots}\,Cos.^q px.\,Cos.^{q_1} p_1x \dots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1} r_1x \dots Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots$$

$$-sr+s_1r_1+\dots+1)x - t\,Sin.ux - t_1\,Sin.u_1x - \dots\}\,\frac{dx}{x} = 0 \dots (88).\quad \int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1Cos.u_1x+\dots}\,Cos.^q px.$$

$$Cos.^{q_1} p_1x \dots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1} r_1x \dots Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots-1)x - t\,Sin.ux -$$

$$-t_1\,Sin.u_1x - \dots\}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots}} \dots (89).$$

12. Différentions les formules du dernier Numéro par rapport à t, alors d'après ce que nous avons vu arriver au N°. 9, l'argument polynôme sous les signes trigonométriques se trouvera augmenté d'un terme $u_a x$, et la discussion de ce cas nous mènerait ici à la même conclusion, savoir: qu'il est absolument indifférent que cet u_a soit compris ou non parmi les u, qui se trouvent dans l'exponentielle. Or, observons que toutes les intégrales (75) à (95) du Numéro mentionné ne sont que des cas spéciaux des intégrales générales (77), (86), (87), (92) et (95). Lorsqu'on applique à celles-ci le procédé en question, ainsi qu'aux intégrales les plus générales (62), (67), (68), (72) et (74), on obtient:

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1x \dots Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\dots+u_a)x+t\,Sin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\right\} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} e^{t+t_1+\dots} \dots (96),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1x \dots Cos.\left\{(sr+s_1r_1+\dots+u_a)x + t\,Sin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\right\}. Sin.x \frac{dx}{x} = 0 \dots (97),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1x \dots Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\dots+u_a)x+t\,Sin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\right\}. Cos.x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} e^{t+t_1+\dots} \dots (98),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1x \dots Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\dots+u_a)x+t\,Sin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\right\}. Sin.x \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} e^{t+t_1+\dots} \dots (99),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1x \dots Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\dots+u_a)x + t\,Sin.ux+t_1 Sin.u_1x+\dots\right\}. Sin.^3 x \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+3}} \left(2^{s+s_1+\dots+2} e^{t+t_1+\dots} - 1\right) \dots (100),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^q px.\; Cos.^{q_1} p_1x \dots Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1} r_1x \dots Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x - t\,Sin.ux - t_1 Sin.u_1x - \dots\right\} \frac{dx}{x} = 0 \dots (101),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^q px.\; Cos.^{q_1} p_1x \dots Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1} r_1x \dots Cos.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x - t\,Sin.ux - t_1 Sin.u_1x - \dots\right\}. Sin.x \frac{dx}{x} = 0 \dots (102),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^q px.\; Cos.^{q_1} p_1x \dots Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1} r_1x \dots Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x - t\,Sin.ux - t_1 Sin.u_1x - \dots\right\}. Cos.x \frac{dx}{x} = 0 \dots (103),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\dots} Cos.^q px.\; Cos.^{q_1} p_1x \dots Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1} r_1x \dots Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x - t\,Sin.ux - t_1 Sin.u_1x - \dots\right\}. Sin.x \frac{dx}{x^2} = 0 \dots (104),$$

$$\int_0^\infty e^{t\,Cos.ux+t_1 Cos.u_1x+\cdots} Cos.^q px.\,Cos.^{q_1}p_1x\ldots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\ldots Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+\right.$$
$$\left.+sr+s_1r_1+\ldots+u_\alpha)x-t\,Sin.ux-t_1\,Sin.u_1x-\ldots\right\}.Sin.^2x\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+3}}\ldots(105).$$

Annulons à présent toutes les constantes t, afin que tous les facteurs exponentiels s'évanouissent, alors dans l'argument polynôme sous les signes trigonométriques le coefficient de x devient $sr+s_1r_1+\ldots+u_\alpha$ ou $qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_\alpha$; nommons-le t, alors cette constante t ne dépend aucunément de s, r, q, p et est tout-à-fait arbitraire avec u_α, pourvu seulement qu'il reste plus grand que $sr+s_1r_1+\ldots$ ou que $qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots$, respectivement, et cela puisque tous les indices p, q, r, s, u sont essentiellement positifs. Dès-lors nous aurons:

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1}r_1x\ldots Sin.tx\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\ldots(106),\quad \int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1}r_1x\ldots Cos.tx.\,Sin.x\frac{dx}{x}=0\ldots(107),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1}r_1x\ldots Sin.tx.\,Cos.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\ldots(108),\quad \int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1}r_1x\ldots Sin.tx.\,Sin.x\frac{dx}{x^2}=\frac{\pi}{2}\ldots(109),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1}r_1x\ldots Sin.tx.\,Sin.^2x\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+3}}(2^{s+s_1+\ldots+2}-1)\ldots(110)$$

(dans ces intégrales on a partout $t>sr+s_1r_1+\ldots$),

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\,Cos.^{q_1}p_1x\ldots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\ldots Sin.\left\{(s+s+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\right\}\frac{dx}{x}=0\ldots(111),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\,Cos.^{q_1}p_1x\ldots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\ldots Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\right\}.Sin.x\frac{dx}{x}=0\ldots(112),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\,Cos.^{q_1}p_1x\ldots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\ldots Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\right\}.Cos.x\frac{dx}{x}=0\ldots(113),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\,Cos.^{q_1}p_1x\ldots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\ldots Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\right\}.Sin.x\frac{dx}{x^2}=0\ldots(114),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\,Cos.^{q_1}p_1x\ldots Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\ldots Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\right\}.Sin.^2x\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+3}}\ldots(115)$$

(dans les cinq dernières intégrales on a partout $t>qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots$).

D'après ce qui a été observé à la fin du Numéro précédent, il n'est pas permis d'annuler toutes les constantes s dans les équations 112 à 115; car pour ce cas on a les formules (106), (107), (108), (109) et (110); mais on peut y faire disparaître tous les facteurs $Cos.^q px$ en y prenant tous les q zéro, et dès-lors nous trouvons:

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\ldots Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\right\}\frac{dx}{x}=0\ldots(116),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x\ldots Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\right\}.Sin.x\frac{dx}{x}=0\ldots(117),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\,Sin.^{s_1}r_1x.\,.Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\right\}.$$

$Cos.x \frac{dx}{x} = 0$ . . (118), $\int_0^\infty Sin.^s rx. Sin.^{s_1} r_1 x \ldots Sin. \left\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi - tx \right\}. Sin.x \frac{dx}{x^2} = 0$ ... (119),

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin. \left\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi - tx \right\}. Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+3}}$ ...... (120). [16]

Partout on a ici $t > sr + s_1 r_1 + \ldots$.

13. Passons à une nouvelle fonction $f(\mathrm{P}) = \frac{1-\mathrm{P}^s}{1-\mathrm{P}}$ et supposons—y $\alpha = 0$, $\beta = 1$; alors nous trouvons:

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{F}(xi)+\mathrm{F}(-xi)\Big] = \frac{1}{2}\left\{\frac{1-e^{srxi}}{1-e^{rxi}} + \frac{1-e^{-srxi}}{1-e^{-rxi}}\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{srxi}-e^{-rxi}+e^{(s-1)rxi}+(1-e^{-srxi}-e^{rxi}+e^{(1-s)rxi})}{1-e^{rxi}-e^{-rxi}+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2-2\,Cos.srx-2\,Cos.rx+2\,Cos.\{(s-1)rx\}}{2-2\,Cos.rx} = \frac{1}{2}\,\frac{1-Cos.srx-Cos.rx+Cos.srx.\,Cos.rx+Sin.srx.\,Sin.rx}{1-Cos.rx} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1-Cos.srx+Sin.srx\,\frac{Sin.rx}{1-Cos.rx}\right\} = \frac{1}{2}\left[1-Cos.srx+Sin.srx.\,Cot.\tfrac{1}{2}rx\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (af)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2\,Sin.^2\tfrac{1}{2}srx+2\,Sin.\tfrac{1}{2}srx.\,Cos.\tfrac{1}{2}srx\,\frac{2\,Sin.\frac{1}{2}rx.\ Cos.\frac{1}{2}rx}{2\,Sin.^2\frac{1}{2}rx}\right\} = \frac{Sin.\frac{1}{2}srx}{Sin.\frac{1}{2}rx}\,Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}rx\}, \quad \ldots \quad (af')$$

$$\frac{1}{2i}\Big[\mathrm{F}(xi)-\mathrm{F}(-xi)\Big] = \frac{1}{2i}\left\{\frac{1-e^{srxi}}{1-e^{rxi}} - \frac{1-e^{-srxi}}{1-e^{-rxi}}\right\} = \frac{1}{2i}\,\frac{-2i\,Sin.srx+2i\,Sin.rx+2i\,Sin.\{(s-1)rx\}}{2-2\,Cos.rx} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-Sin.srx+Sin.rx+Sin.srx.\,Cos.rx-Cos.srx.\,Sin.rx}{1-Cos.rx} = \frac{1}{2}\left\{-Sin.srx+(1-Cos.srx)\,\frac{Sin.rx}{1-Cos.rx}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-Sin.srx+(1-Cos.srx)\,Cot.\tfrac{1}{2}rx\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (ag)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-2\,Sin.\tfrac{1}{2}srx.\,Cos.\tfrac{1}{2}srx+2\,Sin.^2\tfrac{1}{2}srx\,\frac{2\,Sin.\frac{1}{2}rx.\,Cos.\frac{1}{2}rx}{2\,Sin.^2\frac{1}{2}rx}\right\} = \frac{Sin.\frac{1}{2}srx}{Sin.\frac{1}{2}rx}\,Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}rx\}; \quad \ldots \quad (ag')$$

où l'on a fait usage de la formule goniométrique connue $\frac{Sin.a}{1-Cos.a} = Cot.\tfrac{1}{2}a$. Des deux développements, le premier *(af)*, *(ag)*, est polynôme, et le second *(af')*, *(ag')* est composé de trois facteurs monômes. Suivant les réductions ultérieures, qui porteront sur une de ces formes, on en emploiera l'un ou l'autre.

Discutons ensuite la fonction $f_1(\mathrm{P}) = \frac{1+\mathrm{P}^{2s+1}}{1+\mathrm{P}}$, et supposons—y de même $\alpha = 0$, $\beta = 1$; alors nous en déduirons — tout comme nous le ferions de la supposition précédente, en y faisant $\alpha = 0$, et $\beta = -1$, — les formules suivantes:

---

[16] Plusieurs de ces intégrales pourraient se combiner par voie d'addition et de soustraction; mais cette opération ne nous apprendrait rien de nouveau: car dans l'argument polynôme sous les signes trigonométriques le terme tx se changerait, il est vrai, en $(t \pm 1)x$; mais t étant arbitraire, $t \pm 1$ ne l'est pas moins: seulement on pourrait en abaisser la limite d'une unité.

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{F}(xi)+\mathrm{F}(-xi)\Big]=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+e^{(2s+1)rxi}}{1+e^{rxi}}+\frac{1+e^{-(2s+1)rxi}}{1+e^{-rxi}}\right\}=\frac{1}{2}\,\frac{1+e^{(2s+1)rxi}+e^{-rxi}+e^{2srxi}+(1+e^{-(2s+1)rxi}+e^{rxi}+e^{-2srxi})}{1+e^{rxi}+e^{-rxi}+1}=\frac{1}{2}\,\frac{2+2\,Cos.\{(2s+1)rx\}+2\,Cos.rx+2\,Cos.2srx}{2+2\,Cos.rx}=\frac{1}{2}\,\frac{1+Cos.2srx.\,Cos.rx-Sin.2srx.\,Sin.rx+Cos.rx+Cos.2srx}{1+Cos.rx}=\frac{1}{2}\left\{1+Cos.2srx-Sin.2srx\,\frac{Sin.rx}{1+Cos.rx}\right\}=\frac{1}{2}\left\{1+Cos.2srx-Sin.2srx.\,Tang.\tfrac{1}{2}rx\right\}\;\ldots\;(ah)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\,Cos.^2 srx-2\,Sin.srx.\,Cos.srx\,\frac{2\,Sin.\frac{1}{2}rx.\,Cos.\frac{1}{2}rx}{2\,Cos.^2\frac{1}{2}rx}\right\}=\frac{Cos.srx}{Cos.\frac{1}{2}rx}\,Cos.\left\{(2s+1)\tfrac{1}{2}rx\right\},\;\ldots\ldots\ldots\;(ah')$$

$$\frac{1}{2i}\Big[\mathrm{F}(xi)-\mathrm{F}(-xi)\Big]=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1+e^{(2s+1)rxi}}{1+e^{rxi}}-\frac{1+e^{-(2s+1)rxi}}{1+e^{-rxi}}\right\}=\frac{1}{2i}\,\frac{2i\,Sin.\{(2s+1)rx\}-2i\,Sin.rx+2i\,Sin.2srx}{2+2\,Cos.rx}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{Sin.2srx.\,Cos.rx+Cos.2srx.\,Sin.rx-Sin.rx+Sin.2srx}{1+Cos.rx}=\frac{1}{2}\left\{Sin.2srx-(1-Cos.2srx)\,\frac{Sin.rx}{1+Cos.rx}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{Sin.2srx-(1-Cos.2srx)\,Tang.\tfrac{1}{2}rx\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(ai)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\,Sin.srx.\,Cos.srx-2\,Sin.^2 srx\,\frac{2\,Sin.\frac{1}{2}rx.\,Cos.\frac{1}{2}rx}{2\,Cos.^2\frac{1}{2}rx}\right\}=\frac{Sin.srx}{Cos.\frac{1}{2}rx}\,Cos.\left\{(2s+1)\tfrac{1}{2}rx\right\};\;\ldots\ldots\ldots\;(ai')$$

où dans la réduction on a employé la formule connue $\frac{Sin.a}{1+Cos.a}=Tang.\,\frac{1}{2}\,a.$ On rencontre encore ici les deux formes différentes du développement, la forme polynôme (*ah*), (*ai*) et celle où l'on trouve trois facteurs monômes (*ah'*), (*ai'*), et nous serons à même de choisir cette forme convenable que les transformations à faire exigent. Or, dans la suite nous tâcherons toujours, en employant les formules (*af*), (*ag*), (*ah*) et (*ai*), d'éliminer les termes qui ne contiennent pas de facteur $Cot.\,\frac{1}{2}\,rx$ ou $Tang.\,\frac{1}{2}\,rx$, afin d'obtenir des intégrales définies qui contiennent ce facteur, et qui en même temps seront plus simples. Comme cependant la forme non réduite (*af*), (*ag*), (*ah*) et (*ai*) se trouvera toujours énoncée d'abord, chacun pourra la remplacer à volonté par la forme correspondante (*af'*), (*ag'*), (*ah'*) et (*ai'*): ainsi pourtant on aura toujours une intégrale à facteurs monômes, et ce n'est que pour ne pas trop étendre ce Mémoire, que nous ne les y admettrons point.

Enfin soit plus généralement $f_2(\mathrm{P})=\frac{1-\mathrm{P}^s}{1-\mathrm{P}}$, de la forme précédente, mais à présent $\alpha=0$, $\beta=q$: formule qui comprend les deux suppositions précédentes comme des cas spéciaux, lorsqu'on y fait $q=+1$ ou $q=-1$. Ici nous aurons:

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{F}(xi)+\mathrm{F}(-xi)\Big]=\frac{1}{2}\left\{\frac{1-q^s e^{srxi}}{1-q\,e^{rxi}}+\frac{1-q^s e^{-srxi}}{1-q\,e^{-rxi}}\right\}=\frac{1}{2}\,\frac{1-q\,e^{-rxi}-q^s e^{srxi}+q^{s+1}e^{(s-1)rxi}+(1-q\,e^{rxi}-q^s e^{-srxi}+q^{s+1}e^{(1-s)rxi})}{1-q\,e^{rxi}-q\,e^{-rxi}+q^2}=\frac{1-q\,Cos.rx-q^s Cos.srx+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2},\;\ldots\;(ak)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F(xi)-F(-xi)\Big]=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1-q^s e^{srxi}}{1-q\,e^{rxi}}-\frac{1-q^s e^{-srxi}}{1-q\,e^{-rxi}}\right\}=\frac{q\,Sin.rx-q^s Sin.srx+q^{s+1}Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\quad .\quad (al)$$

De ces deux formules nous aurions pu déduire toutes les précédentes de ce Numéro, mais il nous a semblé mieux de les développer indépendamment. [17]

14. Venons-en aux applications, et commençons par les développements (af) et (ag), auprès desquels il faudra employer les théorèmes (I), (IV), (V), (X) et (XIII). Or, on a ici $f(\alpha)=1$, $f(\alpha+\beta)=\delta=s$, $\frac{d\,f(\alpha)}{d\,\alpha}=1$; par conséquent, lorsque nous évitons les fractions en écrivant $2r$ au lieu de r, nous aurons successivement: $\int_0^\infty\{-Sin.2srx+(1-Cos.2srx)\;Cot.rx\}\frac{dx}{x}=2\frac{\pi}{2}(s-1)$, ou lorsque nous y ajoutons l'intégrale T. 194, N°. 5 (voir ζ au N°. 3): $\int_0^\infty(1-Cos.2srx)\;Cot.rx\;\frac{dx}{x}=$ $=2\int_0^\infty Sin.^2 srx.\;Cot.rx\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(2s-1)$ ... (121); $\int_0^\infty\{1-Cos.2srx+Sin.2srx.\;Cot.rx\}\;Sin.x\frac{dx}{x}=$ $=2\frac{\pi}{2}$, $\int_0^\infty\{-Sin.2srx+(1-Cos.2srx)\;Cot.rx\}\;Cos.x\frac{dx}{x}=2\frac{\pi}{2}(s-1)$, ou par l'addition des intégrales $\int_0^\infty Sin.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}$, $\int_0^\infty Cos.2srx.\;Sin.x\frac{dx}{x}=0$, $\int_0^\infty Sin.2srx.\;Cos.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}$ [18]: $\int_0^\infty Sin.2srx.\;Cot.rx.\;Sin.x\;\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}$ ... (122), $\int_0^\infty(1-Cos.2srx)\;Cot.rx.\;Cos.x\;\frac{dx}{x}=$ $=2\int_0^\infty Sin.^2 srx.Cot.rx.Cos.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(2s-1)$ ... (123) [19]; $\int_0^\infty\{-Sin.2srx+(1-Cos.2srx)$ $Cot.rx\}\;Sin.x\frac{dx}{x^2}=2\frac{\pi}{2}(s-1)$, ou par l'addition de l'intégrale $\int_0^\infty Sin.2srx.\;Sin.x\frac{dx}{x^2}=$ $=\frac{1}{2}\pi$ (T. 198, N°. 2): $\int_0^\infty(1-Cos.2srx)\;Cot.rx.\;Sin.x\frac{dx}{x^2}=2\int_0^\infty Sin.^2 srx.\;Cot.rx.$

---

[17] Nous aurions pu encore nous occuper de fonctions, composées de plusieurs facteurs semblables $\frac{1-P^s}{1-P}$, comme nous l'avons fait au sujet des suppositions précédentes: mais comme ces formules deviennent trop compliquées et sont en outre peu utiles, nous nous sommes contentés ici d'une seule fonction.

[18] Ces intégrales, toutes des corollaires de l'intégrale ζ du N°. 3, se trouvent respectivement Table 194, N°. 1 et Table 195, N°. 2 et 3.

[19] La somme et la différence de ces deux formules nous fournit: $\int_0^\infty Sin.srx.\;Sin.\{(sr+1)x\}.\;Cot.rx\frac{dx}{x}=$ $=\frac{1}{2}s\pi$ ... (124), $\int_0^\infty Sin.srx.\;Sin.\{(sr-1)x\}.\;Cot.rx\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}(s-1)\pi$ ... (125).

$Sin.x \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}(2s-1)$ ... (126); $\int_0^\infty \{-Sin.2srx + (1 - Cos.2srx)\ Cot.rx\}\ Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} =$ $= 2\frac{\pi}{2}(s-1-\frac{1}{4})$, ou en y ajoutant l'intégrale $\int_0^\infty Sin.2srx.\, Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}\pi$ (T.198, N°.6): $\int_0^\infty (1-Cos.2srx)\ Cot.rx.\ Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = 2\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cot.rx.\ Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{4}(4s-3)$ ... (127).

Puis pour les formules (ah) et (ai) on a $f(\alpha) = 1$, $f(\alpha+\beta) = 1$, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1$; par conséquent pour un r double:

$\int_0^\infty \{Sin.4srx - (1-Cos.4srx)\ Tang.rx\} \frac{dx}{x} = 2.0$, d'où par l'intermédiaire de l'intégrale (ζ) au N°. 3: $\int_0^\infty (1 - Cos.4srx)\ Tang.rx \frac{dx}{x} = 2 \int_0^\infty Sin.^2 2srx.\ Tang.rx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}$ ... (128); $\int_0^\infty \{1 + Cos.4srx - Sin.4srx.\ Tang.rx\}\ Sin.x \frac{dx}{x} = 2\frac{\pi}{2}$, $\int_0^\infty \{Sin.4srx - (1 - Cos.4srx)\ Tang.rx\}\ Cos.x \frac{dx}{x} = 2.0$, ou par les intégrales T. 194, N°. 1, T. 195, N°. 2, 3, que l'on vient d'employer: $\int_0^\infty Sin.4srx.Tang.rx.Sin.x \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2}$ ... (129), $\int_0^\infty (1-Cos.4srx)\ Tang.rx.\ Cos.x \frac{dx}{x} = 2 \int_0^\infty Sin.^2 2srx.\ Tang.rx.\ Cos.x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}$ ... (130) [20]; $\int_0^\infty \{Sin.4srx - - (1-Cos.4srx)\ Tang.rx\}\ Sin.x \frac{dx}{x^2} = 2.0$, ou par l'intégrale T. 198, N°. 2, employée plus haut: $\int_0^\infty (1-Cos.4srx)\ Tang.rx.Sin.x \frac{dx}{x^2} = 2\int_0^\infty Sin.^2 2srx.Tang.rx.Sin.x \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}$ ... (135); $\int_0^\infty \{Sin.4srx-(1-Cos.4srx)Tang.rx\}\ Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{4}\pi$, ou par l'intégrale T. 198, N°. 6,

---

[20] Ces intégrales donnent par voie d'addition et de soustraction: $\int_0^\infty Sin.\{(2sr+1)x\}.\ Sin.2srx.\ Tang.rx \frac{dx}{x} = 0$ ... (131), $\int_0^\infty Sin.\{(2sr-1)x\}.\ Sin.2srx.\ Tang.rx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}$ ... (132). Or, celles-ci peuvent encore être combinées avec les intégrales (124) et (125), après qu'on y aura mis $2s$ au lieu de s, lorsqu'on emploie les relations $Cot.a + Tang.a = 2Cosec.2a$, $Cot.a - Tang.a = 2Cot.2a$. De cette manière il viendra, après le changement de $2r$ en r: $\int_0^\infty Sin.\{(sr+1)x\}.\ Sin.srx.\ Cosec.rx \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}s\pi$ ... (133), $\int_0^\infty Sin.\{(sr-1)x\}.\ Sin.srx.\ Cosec.rx \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}s\pi$ ... (134); tandis que la seconde relation reproduit les formules (124) et (125), ce qui offre une vérification de nos calculs.

dont on a fait tantôt un même usage: $\int_0^\infty (1 - Cos.4srx)\ Tang.rx.\ Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} =$
$= 2\int_0^\infty Sin.^2 2srx.\ Tang.rx.\ Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = \frac{3}{4}\pi \ \ldots\ (136).$

Lorsque nous considérons ces deux séries d'intégrales définies, les formules (121) à (127) et les suivantes (128) à (136), et lorsque dans les premières on remplace le s par $2s$, on voit qu'elles ne diffèrent que par les facteurs $Cot.rx$ et $Tang.rx$. Donc, puisque $2\,Cosec.\,2a = Cot.\,a + Tang.\,a$, et $2\,Cot.\,2a = Cot.\,a - Tang.\,a$, la différence des formules correspondantes doit reproduire les premières intégrales; puisqu'il en est ainsi, cela servira de vérification: quant à leur somme, on trouve, en prenant r pour $2r$:

$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.rx \frac{dx}{x} = s\pi \ \ldots\ (137),$ $\int_0^\infty Sin.2srx.\ Cosec.rx.\ Sin.x \frac{dx}{x} = 0 \ \ldots\ (138),$

$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.rx.\ Cos.x \frac{dx}{x} = s\pi \ \ldots\ (139),$ $\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.rx.\ Sin.x \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2} s\pi \ldots (140),$

$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.rx.\ Sin.^2 x \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} s\pi \ \ldots\ (141).$

Encore a-t-on pour les développements (ak) et (al): $f(\alpha) = 1$, $f(\alpha+\beta) =$
$= \frac{1-q^s}{1-q}$, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1$; par suite les mêmes théorèmes donnent ici successivement:

$\int_0^\infty \frac{Sin.rx - q^{s-1} Sin.srx + q^s Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\ Cos.rx + q^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2q}\left(\frac{1-q^s}{1-q} - 1\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1-q^{s-1}}{1-q} \ \ldots\ (142);$

soustrayons-la de l'intégrale (T. 219, N°. 5): $\int_0^\infty \frac{Sin.rx}{1-2q\ Cos.rx + q^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2(1-q)}, (q < 1)\ (\iota),$

alors il nous reste: $\int_0^\infty \frac{Sin.srx - q\, Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\ Cos.rx + q^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2(1-q)}\ (q < 1) \ \ldots\ (143)$ [21];

---

[21] Voyons ce que nous pouvons déduire de cette intégrale. En premier lieu pour $s = 1$ elle donne l'intégrale (T. 219, N°. 5), qu'on vient d'employer. Pour $s = 2$, en nous aidant de celle-là, nous obtenons: $\int_0^\infty \frac{Sin.2rx}{1-2q\,Cos.rx+q^2} \frac{dx}{x} = \frac{1+q}{1-q}\pi, (q < 1) \ldots (144)$; pour $s = 3$ encore: $\int_0^\infty \frac{Sin.3rx}{1-2q\,Cos.rx+q^2} \frac{dx}{x} =$
$= \frac{\pi}{2} \frac{1+q+q^2}{1-q}, (q < 1) \ldots (145)$, de sorte que nous trouvons en général:
$\int_0^\infty \frac{Sin.arx}{1-2q\,Cos.rx+q^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{1-q^a}{(1-q)}$, $q < 1$, a entier (146), intégrale, qui aussi vérifie l'intégrale (143), considérée comme équation de réduction, ainsi qu'il est nécessaire; elle coïncide de nouveau pour $a = 1$ avec l'intégrale employée (ι).

$$\int_0^\infty \frac{1 - q\,Cos.\,rx - q^s\,Cos.\,srx + q^{s+1}\,Cos.\,\{(s-1)\,rx\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,Sin.\,x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ (147),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx - q^{s-1}\,Sin.\,srx + q^s\,Sin.\,\{(s-1)rx\}}{1 - 2q\,Cos.\,rx + q^2}\,Cos.\,x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-q^{s-1}}{1-q}\ \ldots\ldots\ (148),$$ [22]

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx - q^{s-1}\,Sin.\,srx + q^s\,Sin.\,\{(s-1)\,rx\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,Sin.\,x\,\frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-q^{s-1}}{1-q}\ \ldots\ldots\ (151),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx - q^{s-1}\,Sin.\,srx + q^s\,Sin.\,\{(s-1)\,rx\}}{1 - 2q\,Cos.\,rx + q^2}\,Sin.^2 x\,\frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2q}\left(\frac{1-q^s}{1-q} - 1 - \tfrac{1}{4}\,q\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1-q^{s-1}}{1-q} - \tfrac{1}{4}\right)\ \ldots\ (152).$$

15. D'après la manière dont on a agi précédemment, il nous faut combiner la dernière forme fractionnaire avec une des formes précédentes, pour obtenir ainsi de nouveaux résultats remarquables. Lorsque on combine ainsi la dernière fonction fractionnaire générale à argument q avec un facteur de même nature que les puissances discutées au N°. 4, il faut procéder comme suit.

Supposons la fonction $f(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \mathrm{P}^s\,\dfrac{1-\mathrm{Q}^t}{1-\mathrm{Q}}$ avec les valeurs spéciales $\alpha = \beta = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = q$, et nous aurons:

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{F}_t(xi) + \mathrm{F}_t(-xi)\Big] = \frac{1}{2}\left\{(1+e^{rxi})^s\,\frac{1-q^t e^{tuxi}}{1-q\,e^{uxi}} + (1+e^{-rxi})^s\,\frac{1-q^t e^{-tuxi}}{1-q\,e^{-uxi}}\right\} = \frac{1}{2}\,(e^{\frac{1}{2}rxi} + e^{-\frac{1}{2}rxi})^s$$
$$\frac{e^{\frac{1}{2}srxi}\,(1 - q\,e^{-uxi} - q^t e^{tuxi} + q^{t+1} e^{(t-1)uxi}) + e^{-\frac{1}{2}srxi}\,(1 - q\,e^{uxi} - q^t e^{-tuxi} + q^{t+1} e^{(1-t)uxi})}{1 - q\,e^{uxi} - q\,e^{-uxi} + q^2} =$$
$$= (2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}rx)^s\,\frac{Cos.\,\frac{1}{2}srx - q\,Cos.\,\{(\frac{1}{2}sr - u)x\} - q^t Cos.\,\{(\frac{1}{2}sr + tu)x\} + q^{t+1} Cos.\,\{(\frac{1}{2}sr + [t-1]u)x\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,ux + q^2}\ ,\ \ldots\ (am)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[\mathrm{F}_t(xi) - \mathrm{F}_t(-xi)\Big] = (2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}rx)^s\,\frac{Sin.\,\frac{1}{2}srx - q\,Sin.\,\{(\frac{1}{2}sr - u)x\} - q^t Sin.\,\{(\frac{1}{2}sr + tu)x\} + q^{t+1} Sin.\,\{(\frac{1}{2}sr + [t-1]u)x\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,ux + q^2}\ (an).$$

Gardons la même forme de la fonction, mais faisons-y $\alpha = 1$, $\beta = -1$, tandis qu'il reste $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = q$; dès-lors il viendra:

---

[22] Après avoir multiplié la dernière intégrale par q, on peut la combiner avec la précédente par voie d'addition et de soustraction; ainsi l'on aura:

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,x + q\,Sin.\,\{(r-1)x\} - q^s\,Sin.\,\{(sr+1)x\} + q^{s+1}\,Sin.\,\{[(s-1)r+1]x\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-q^s}{1-q}\ \ldots\ (149),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,x - q\,Sin.\,\{(r+1)x\} + q^s\,Sin.\,\{(sr-1)x\} - q^{s+1}\,Sin.\,\{[(s-1)r-1]x\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-2q+q^s}{1-q}\ (150).$$

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{F}_f(xi)+\mathrm{F}_f(-xi)\Big]=\frac{1}{2}\Big\{(1-e^{rxi})^s\,\frac{1-q^t e^{tuxi}}{1-q\,e^{uxi}}+(1-e^{-rxi})^s\,\frac{1-q^t e^{-tuxi}}{1-q\,e^{-uxi}}\Big\}=\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{i}(e^{\frac{1}{2}rxi}-e^{-\frac{1}{2}rxi})\Big\}^s.$$

$$\frac{e^{\frac{1}{2}srxi}e^{-\frac{1}{2}s\pi i}(1-q\,e^{-uxi}-q^t e^{tuxi}+q^{t+1}e^{(t-1)uxi})+e^{-\frac{1}{2}srxi}e^{\frac{1}{2}s\pi i}(1-q\,e^{uxi}-q^t e^{-tuxi}+q^{t+1}e^{(1-t)uxi})}{1-q\,e^{uxi}-q\,e^{-uxi}+q^2}=$$

$$=(2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\,\frac{Cos.(\frac{1}{2}s\pi-\frac{1}{2}srx)-q\,Cos.\{\frac{1}{2}s\pi-(\frac{1}{2}sr-u)x\}-q^t\,Cos.\{\frac{1}{2}s\pi-(\frac{1}{2}sr+tu)x\}+q^{t+1}\,Cos.\{\frac{1}{2}s\pi-(\frac{1}{2}sr+[t-1]u)x\}}{1-2q\,Cos.ux+q^2},\;\ldots\ldots\ldots\;(ao)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[\mathrm{F}_f(xi)-\mathrm{F}_f(-xi)\Big]=(2Sin.\tfrac{1}{2}rx)^s\,\frac{Sin.(\frac{1}{2}s\pi-\frac{1}{2}srx)-q\,Sin.\{\frac{1}{2}s\pi-(\frac{1}{2}sr-u)x\}-q^t Sin.\{\frac{1}{2}s\pi-(\frac{1}{2}sr+tu)x\}+q^{t+1}\,Sin.\{\frac{1}{2}s\pi-(\frac{1}{2}sr+[t-1]u)x\}}{1-2\,q\,Cos.ux+q^2}\;\ldots\ldots\ldots\;(ap)$$

Or, dans le Numéro 13 on a vu que le développement général à dénominateur $1-2\,q\,Cos.rx+q^2$ se réduisait aux deux développements précédents dans le cas, où pour la constante q on y introduisait l'unité positive ou négative respectivement. Ici il en sera de même, et ces suppositions spéciales nous seront permises, sans que les fonctions cessent de valoir. Nous aurions pu commencer par ces cas spéciaux, comme nous l'avons fait plus haut, mais il sera plus facile ici de les déduire du cas général. Dans la supposition de $q=1$, le dénominateur devient $2(1-Cos.ux)=$ $=2.2.Sin.^2\frac{1}{2}ux=(2\,Sin.\frac{1}{2}ux)^2$; et dans le cas contraire de $q=-1$, on trouve pour le dénominateur $2(1+Cos.ux)=2.2\,Cos.^2\frac{1}{2}ux=(2\,Cos.\frac{1}{2}ux)^2$. Ainsi les développements correspondants s'écriront sans trop de peine. Ici, pour en simplifier l'expression, nous ferons la constante u égale à r, et dès-lors nous aurons les formules suivantes, pour le cas de $q=1$:

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{F}_c(xi)+\mathrm{F}_c(-xi)\Big]=(2Cos.\tfrac{1}{2}rx)^{s-2}.Cot.^2\tfrac{1}{2}rx.[Cos.\tfrac{1}{2}srx-Cos.\{(\tfrac{1}{2}s-1)rx\}-Cos.\{(\tfrac{1}{2}s+t)rx\}+$$
$$+Cos.\{(\tfrac{1}{2}s+t-1)rx\}],\;\ldots\ldots\ldots\;(ar)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[\mathrm{F}_c(xi)-\mathrm{F}_c(-xi)\Big]=(2Cos.\tfrac{1}{2}rx)^{s-2}.Cot.^2\tfrac{1}{2}rx.[Sin.\tfrac{1}{2}srx-Sin.\{(\tfrac{1}{2}s-1)rx\}-Sin.\{(\tfrac{1}{2}s+t)rx\}+$$
$$+Sin.\{(\tfrac{1}{2}s+t-1)rx\}],\;\ldots\ldots\ldots\;(as)$$

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{F}_f(xi)+\mathrm{F}_f(-xi)\Big]=(2Sin.\tfrac{1}{2}rx)^{s-2}.[Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi-\tfrac{1}{2}srx)-Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(\tfrac{1}{2}s-1)x\}-Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-$$
$$-(\tfrac{1}{2}s+t)rx\}+Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(\tfrac{1}{2}s+t-1)rx\}],\;\ldots\ldots\ldots\;(at)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[\mathrm{F}_f(xi)-\mathrm{F}_f(-xi)\Big]=(2Sin.\tfrac{1}{2}rx)^{s-2}.[Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi-\tfrac{1}{2}srx)-Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(\tfrac{1}{2}s-1)rx\}-Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-$$
$$-(\tfrac{1}{2}s+t)rx\}+Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(\tfrac{1}{2}s+t-1)rx\}],\;\ldots\ldots\ldots\;(au)$$

et encore pour $q = -1$, où maintenant t doit être impair, p. c. $2t+1$:

$$\frac{1}{2}\Big[F_e(xi) + F_e(-xi)\Big] = (2\,Cos.\tfrac{1}{2}rx)^{s-2}.\big[Cos.\tfrac{1}{2}srx + Cos.\{(\tfrac{1}{2}s-1)rx\} + Cos.\{(\tfrac{1}{2}s+2t+1)rx\} +$$
$$+ Cos.\{(\tfrac{1}{2}s+2t)rx\}\big], \quad \ldots \quad (av)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_e(xi) - F_e(-xi)\Big] = (2\,Cos.\tfrac{1}{2}rx)^{s-2}.\big[Sin.\tfrac{1}{2}srx + Sin.\{(\tfrac{1}{2}s-1)rx\} + Sin.\{(\tfrac{1}{2}s+2t+1)rx\} +$$
$$+ Sin.\{(\tfrac{1}{2}s+2t)rx)\}\big], \quad \ldots \quad (aw)$$

$$\frac{1}{2}\Big[F_f(xi) + F_f(-xi)\Big] = (2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^{s-2}.\,Tang.^2\tfrac{1}{2}rx.\big[Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - \tfrac{1}{2}srx) + Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (\tfrac{1}{2}s-1)rx\} +$$
$$+ Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (\tfrac{1}{2}s+2t+1)rx\} + Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (\tfrac{1}{2}s+2t)rx\}\big], \quad \ldots \quad (ax)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[F_f(xi) - F_f(-xi)\Big] = (2\,Sin.\tfrac{1}{2}rx)^{s-2}.\,Tang.^2\tfrac{1}{2}rx.\big[Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - \tfrac{1}{2}srx) + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (\tfrac{1}{2}s-1)rx\} +$$
$$+ Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (\tfrac{1}{2}s+2t+1)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (\tfrac{1}{2}s+2t)rx\}\big]. \quad \ldots \quad (ay)$$

16. Lorsque maintenant on veut faire usage de ces développements auprès des théorèmes du N°. 3, il convient de faire précéder les formules plus générales par les formules spéciales. Ainsi pour les formules (ar) et (as), (av) et (aw), (am) et (an) — où les deux premiers couples se déduisent du dernier par la supposition de $q = \pm 1$ — il faut d'abord observer qu'on a respectivement: $f(\alpha) = 1$, $f(\alpha+\beta) = t.2^s$, $= 2^s$, $= 2^s \dfrac{1-q^t}{1-q}$, $\dfrac{df(\alpha)}{d\alpha} = st$, $= s$, $= s\dfrac{1-q^t}{1-q}$, $\dfrac{df(\alpha)}{d\alpha} = \tfrac{1}{2}t(t-1)$, $= t+1$, $= \dfrac{1-t\,q^{t-1}+(t-1)q^t}{(1-q)^2}$; et par conséquent nous aurons, en doublant les r dans les quatre premières des équations mentionnées, afin d'éviter des fractions:

$$\int_0^\infty [Sin.srx - Sin.\{(s-2)rx\} - Sin.\{(s+2t)rx\} + Sin.\{(s+2t-2)rx\}]\; Cos.^s rx.\; Cosec.^2 rx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s-2}}(2^s t - 1) \;\ldots\; (153),$$

$$\int_0^\infty [Sin.srx + Sin.\{(s-2)rx\} + Sin.\{(s+4t+2)rx\} + Sin.\{(s+4t)rx\}]\; Cos.^{s-2} rx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s-1}}(2^s - 1) \;\ldots\; (154),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.srx - q\,Sin.\{(sr-u)x\} - q^t\,Sin.\{(sr+tu)x\} + q^{t+1}Sin.\{(sr+[t-1]u)x\}}{1-2q\,Cos.ux + q^2}\; Cos.^s rx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}}\left\{2^s\frac{1-q^t}{1-q} - 1\right\} \;\ldots\; (155),$$

$$\int_0^\infty [Cos.srx - Cos.\{(s-2)rx\} - Cos.\{(s+2t)rx\} + Cos.\{(s+2t-2)rx\}]\; Cos.^s rx.\; Cosec.^2 rx.\; Sin.x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s-1}} \;\ldots\; (156),$$

$$\int_0^\infty [Sin.srx - Sin.\{(s-2)rx\} - Sin.\{(s+2t)rx\} + Sin.\{(s+2t-2)rx\}]\; Cos.^s rx.\; Cosec.^2 rx.\; Cos.x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s-1}}(2^s t - 1) \;\ldots\; (157),$$

$$\int_0^\infty [Cos.srx + Cos.\{(s-2)rx\} + Cos.\{(s+4t+2)rx\} +$$

$$+ Cos.\{(s+4t)rx\}]\ Cos.^{s-2}rx.\ Sin.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2^{s-1}}\ \dots (158),\quad \int_0^\infty [Sin.srx+Sin.\{(s-2)rx\}+$$

$$+ Sin.\{(s+4t+2)rx\}+Sin.\{(s+4t)rx\}]\ Cos.^{s-2}rx.\ Cos.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2^{s-1}}(2^s-1)\ \dots\dots\ (159),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.srx-qCos.\{(sr-u)x\}-q^tCos.\{(sr+tu)x\}+q^{t+1}Cos.\{(sr+[t-1]u)x\}}{1-2q\,Cos.ux+q^2}\,Cos.^srx.\,Sin.x\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{s+1}}\dots(160),\quad \int_0^\infty \frac{Sin.srx-qSin.\{(sr-u)x\}-q^tSin.\{(sr+tu)x\}+q^{t+1}Sin.\{(sr+[t-1]u)x\}}{1-2q\,Cos.ux+q^2}$$

$$Cos.^srx.\,Cos.x\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2^{s+1}}\left\{2^s\frac{1-q^t}{1-q}-1\right\}\ \dots (161),$$ [23] $$\int_0^\infty [Sin.srx-Sin.\{(s-2)rx\}-$$

$$-Sin.\{(s+2t)rx\}+Sin.\{(s+2t-2)rx\}]\ Cos.^srx.\ Cosec.^2rx.\ Sin.x\frac{dx}{x^2}=\frac{\pi}{2^{s-1}}(2^st-1)\ \dots (164),$$

$$\int_0^\infty [Sin.srx+Sin.\{(s-2)rx\}+Sin.\{(s+4t+2)rx\}+Sin.\{(s+4t)rx\}]\ Cos.^{s-2}rx.\ Sin.x\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{s-1}}(2^s-1)\ \dots\dots\ (165),\quad \int_0^\infty \frac{Sin.srx-q\,Sin.\{(sr-u)x\}-q^t\,Sin.\{(sr+tu)x\}+}{1-2q\,Cos.ux+}$$

$$\frac{+q^{t+1}Sin\{(sr+[t-1]u)x\}}{+q^2}\,Cos.^srx.\,Sin.x\frac{dx}{x^2}=\frac{\pi}{2^{s+1}}\left\{2^s\frac{1-q^t}{1-q}-1\right\}\ \dots (166),\quad \int_0^\infty [Sin.srx-$$

$$-Sin.\{(s-2)rx\}-Sin.\{(s+2t)rx\}+Sin.\{(s+2t-2)rx\}]\ Cos.^srx.\ Cosec.^2rx.\ Sin.^2x\frac{dx}{x^3}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{s-1}}\left[2^st-1-\tfrac{1}{4}\{st+\tfrac{1}{2}t(t-1)\}\right]=\frac{\pi}{2^{s+2}}\{2^{s+3}t-2st+t(t-1)-8\}\ \dots (167),$$

$$\int_0^\infty [Sin.srx+Sin.\{(s-2)rx\}+Sin.\{(s+4t+2)rx\}+Sin.\{(s+4t)rx\}]\ Cos.^{s-2}rx.\ Sin.^2x\frac{dx}{x^3}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{s-1}}\{2^s-1-\tfrac{1}{4}(s+t+1)\}=\frac{\pi}{2^{s+1}}\{2^{s+2}-5-(s+t)\}\ \dots\dots\dots\dots (168),$$

---

[23] Formules, dont la somme et la différence sont:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\{(sr+1)x\}-qSin.\{(sr-u+1)x\}-q^tSin.\{(sr+tu+1)x\}+q^{t+1}Sin.\{(sr+[t-1]u+1)x\}}{1-2q\,Cos.ux+q^2}$$

$$Cos.^srx\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\frac{1-q^t}{1-q}\dots (162),\quad \int_0^\infty \frac{Sin.\{(sr-1)x\}-qSin.\{(sr-u-1)x\}-q^tSin.\{(sr+tu-1)x\}+}{1-2q\,Cos.ux+}$$

$$\frac{+q^{t+1}Sin.\{(sr+[t-1]u-1)x\}}{+q^2}\,Cos.^srx\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2^s}\left\{2^{s-1}\frac{1-q^t}{1-q}-1\right\}\ \dots (163),$$

d'où pour $q=1$, on pourrait déduire des intégrales, qui sont la somme et la différence des formules (156) et (157), et analogues à celles-là: pour les intégrales correspondantes (158) et (159) on obtiendrait le résultat analogue en supposant $q=-1$ et $t=2t$.

$$\int_0^\infty \frac{Sin. srx - q Sin.\{(sr-u)x\} - q^t Sin.\{(sr+tu)x\} + q^{t+1} Sin.\{(sr+[t-1]u)x\}}{1-2q\, Cos. ux + q^2}\, Cos.^s rx.\, Sin.^2 x \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+1}}\left\{2^s \frac{1-q^t}{1-q} - 1 - \tfrac{1}{4} q^s \frac{1-q^t}{1-q} - \tfrac{1}{4} q \frac{1-tq^{t-1}+(t-1)q^t}{(1-q)^2}\right\} = \frac{\pi}{2^{s+3}}\left\{(2^{s+2}-q^s)\frac{1-q^t}{1-q} - \right.$$

$$\left. - 4 - q\frac{1-tq^{t-1}+(t-1)q^t}{(1-q)^2}\right\} \ldots (169).$$

Quant aux autres formules à facteur $Sin.^s rx$, rangeons—les d'abord par ordre de généralité, comme suit: (at) et (au), (ax) et (ay), (ao) et (ap); puis observons qu'on y a respectivement $f(\alpha) = 1$, $f(\alpha+\beta) = 0$, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = st, = s, = s\frac{1-q^t}{1-q}$, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha_1} = \frac{1}{2} t(t-1), = t+1, = \frac{1-tq^{t-1}+(t-1)q^t}{(1-q)^2}$, et doublons les r dans les quatre premières équations, pour éviter les fractions; alors nous aurons:

$$\int_0^\infty [Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) - Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s-2)rx\} - Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+2t)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+2t-2)rx\}]$$

$$Sin.^{s-2} rx \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2^{s+1}} \ldots (170),\quad \int_0^\infty [Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s-2)rx\} +$$

$$+ Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+4t+2)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+4t)rx\}]\; Sin.^s rx.\; Sec.^2 rx \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2^{s-1}} \ldots (171),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) - q\, Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(sr-u)x\} - q^t Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(sr+tu)x\} +}{1-2q\, Cos. ux +}$$

$$\frac{+ q^{t+1} Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(sr+[t-1]u)x\}}{+q^2}\; Sin.^s rx \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2^{s+1}} \ldots (172),\quad \int_0^\infty [Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) -$$

$$- Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s-2)rx\} - Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+2t)rx\} + Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+2t-2)rx\}]\; Sin.^{s-2} rx.$$

$$Sin. x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s-1}} \ldots (173),\quad \int_0^\infty [Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) - Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s-2)rx\} - Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+2t)rx\} +$$

$$+ Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+2t-2)rx\}]\; Sin.^{s-2} rx.\; Cos. x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s-1}} \ldots\ldots (174),\quad \int_0^\infty [Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) +$$

$$+ Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s-2)rx\} + Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+4t+2)rx\} + Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+4t)rx\}]\; Sin.^s rx.\; Sec.^2 rx.$$

$$Cos. x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s-1}} \ldots (175),\quad \int_0^\infty [Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s-2)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+$$

$$+ 4t+2)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(s+4t)rx\}]\; Sin.^s rx.\; Sec.^2 rx.\; Cos. x \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2^{s+1}} \ldots\ldots (176),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) - q\, Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(sr-u)x\} - q^t Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(sr+tu)x\} +}{1-2q\, Cos. ux +}$$

$$\frac{+ q^{t+1} Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi-(sr+[t-1]u)x\}}{+q^2}\; Sin.^s rx.\; Sin. x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (177),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) - q\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr-u)x\} - q^t\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+tu)x\} + q^{t+1}\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+[t-1]u)x\}}{1-2q\,Cos.\,ux + q^2}\,Sin.^s rx.\ Cos.x\,\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2^{s+1}} \;\ldots\ldots\; (178),$$ [24]

$$\int_0^\infty [Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) - Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s-2)rx\} - Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s+2t)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s+2t-2)rx\}]\ Sin.^{s-2}rx.\ Sin.x\,\frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi}{2^{s-1}} \;\ldots\ldots\; (181),$$

$$\int_0^\infty [Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s-2)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s+4t+2)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s+4t)rx\}]\ Sin.^s rx.\ Sec.^2 rx.\ Sin.x\,\frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi}{2^{s+1}} \; (182),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) - q\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr-u)x\} - q^t\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+tu)x\} + q^{t+1}\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+[t-1]u)x\}}{1-2q\,Cos.\,ux + q^2}\,Sin.^s rx.\ Sin.x\,\frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi}{2^{s+1}} \;\ldots\; (183),$$

$$\int_0^\infty [Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) - Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s-2)rx\} - Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s+2t)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s+2t-2)rx\}]\ Sin.^{s-2}rx.\ Sin.^2 x\,\frac{dx}{x^3} = -\frac{\pi}{2^{s-1}}\,[1 - \tfrac{1}{8}t(2s+t-1)] \;\ldots\; (184),$$

$$\int_0^\infty [Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s-2)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s+4t+2)rx\} + Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (s+4t)rx\}]\ Sin.^s rx.\ Sec.^2 rx.\ Sin.^2 x\,\frac{dx}{x^3} = -\frac{\pi}{2^{s-1}}\,\{1 + \tfrac{1}{4}(s+t+1)\} \;\ldots\; (185),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) - q\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr-u)x\} - q^t\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+tu)x\} + q^{t+1}\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+[t-1]u)x\}}{1-2q\,Cos.\,ux + q^2}\,Sin.^s rx.\ Sin.^2 x\,\frac{dx}{x^3} =$$

$$= -\frac{\pi}{2^{s+1}}\left\{1 + \tfrac{1}{4}q^s\,\frac{1-q^t}{1-q} + q\,\frac{1 - tq^{t-1} + (t-1)q^t}{4(1-q)^2}\right\} \;\ldots\; (186).$$

---

[24] Par voie d'addition et de soustraction de ces deux intégrales on acquiert:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr-1)x\} - q\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr-u-1)x\} - q^t\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+tu-1)x\} + q^{t+1}\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr-1+[t-1]u)x\}}{1-2q\,Cos.\,ux + q^2}\,Sin.^s rx\,\frac{dx}{x} = 0 \;\ldots\ldots\; (179),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+1)x\} - q\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr-u+1)x\} - q^t\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+tu+1)x\} + q^{t+1}\,Sin.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (sr+1+[t-1]u)x\}}{1-2q\,Cos.\,ux + q^2}\,Sin.^s rx\,\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2^s} \;\ldots\ldots\; (180).$$

Lorsque dans ces intégrales on fait $q=+1$, ou $q=-1$ (et alors $t=2t$), on obtient des intégrales, qui sont la somme et la différence des formules précédentes (173) et (174), (175) et (176).

17. Passons maintenant à une autre combinaison de formes et prenons à cet effet la fonction du N°. 7: de telle sorte on obtiendra la fonction $f(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = = e^{s\mathrm{P}}\frac{1-\mathrm{Q}^t}{1-\mathrm{Q}}$, où il faut prendre aussi $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = q$, comme on l'a fait dans chaque fonction à part. Ainsi nous trouverons:

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{F}_g(xi)+\mathrm{F}_g(-xi)\Big] = \frac{1}{2}\left\{e^{se^{rxi}}\frac{1-q^te^{tuxi}}{1-qe^{uxi}} + e^{se^{-rxi}}\frac{1-q^te^{-tuxi}}{1-qe^{-uxi}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{s(Cos.rx+iSin.rx)}\left(1-qe^{-uxi}-q^te^{tuxi}+q^{t+1}e^{(t-1)uxi}\right)+e^{s(Cos.rx-iSin.rx)}\left(1-qe^{uxi}-q^te^{-tuxi}+q^{t+1}e^{(1-t)uxi}\right)}{1-qe^{uxi}-qe^{-uxi}+q^2} = e^{sCos.rx}\,\frac{Cos.(s\,Sin.rx)-q\,Cos.(s\,Sin.rx-ux)-q^t\,Cos.(s\,Sin.rx+tux)+q^{t+1}\,Cos.\{s\,Sin.rx+(t-1)ux\}}{1-2q\,Cos.ux+q^2}, \quad \ldots\ldots \quad (az)$$

$$\frac{1}{2i}\Big[\mathrm{F}_g(xi)-\mathrm{F}_g(-xi)\Big] = \frac{1}{2i}\left\{e^{se^{rxi}}\frac{1-q^te^{tuxi}}{1-qe^{uxi}} - e^{se^{-rxi}}\frac{1-q^te^{-tuxi}}{1-qe^{-uxi}}\right\} =$$

$$= e^{sCos.rx}\,\frac{Sin.(s\,Sin.rx)-q\,Sin.(s\,Sin.rx-ux)-q^t\,Sin.(s\,Sin.rx+tux)+q^{t+1}\,Sin.\{s\,Sin.rx+(t-1)ux\}}{1-2q\,Cos.ux+q^2} \quad [25] \quad \ldots\ldots \quad (ba).$$

18. Pour l'application de ces développements aux théorèmes du N°. 3, observons que $f(\alpha)=1$, $f(\alpha+\beta)=e^s\frac{1-q^t}{1-q}$, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}=se^s\frac{1-q^t}{1-q}$, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha_1}=e^s\frac{1-tq^{t-1}+(t-1)q^t}{(1-q)^2}$.
Par conséquent on trouvera:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.(sSin.rx)-q\,Sin.(sSin.rx-ux)-q^tSin.\{sSin.rx+tux\}+q^{t+1}Sin.\{sSin.rx+(t-1)ux\}}{1-2q\,Cos.ux+q^2}\,e^{sCos.rx}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\left(e^s\frac{1-q^t}{1-q}-1\right) \ldots (187),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.(s\,Sin.rx)-q\,Cos.(s\,Sin.rx-ux)-q^tCos.\{s\,Sin.rx+tux\}+q^{t+1}Cos.\{s\,Sin.rx+(t-1)ux\}}{1-2q\,Cos.ux+q^2}\,e^{sCos.rx}\,Sin.x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ldots (188),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.(sSin.rx)-q\,Sin.(sSin.rx-ux)-q^tSin.\{sSin.rx+tux\}+q^{t+1}Sin.\{sSin.rx+(t-1)ux\}}{1-2q\,Cos.ux+q^2}$$

---

[25] Dans ces deux équations on pourrait prendre l'unité positive ou négative pour q, mais puisque cette supposition spéciale ne donne pas lieu à des réductions de quelque intérêt, comme dans les suppositions précédentes, il vaut mieux ne pas nous y arrêter.

$$e^{s\,Cos.\,rx}\,Cos.\,x\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\left(e^{s}\,\frac{1-q^{t}}{1-q}-1\right)\ \dots\ (189),$$ [26] $$\int_{0}^{\infty}\frac{Sin.(s\,Sin.\,rx)-q\,Sin.(s\,Sin.\,rx-ux)-q^{t}\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx+tux\}+q^{t+1}\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx+(t-1)ux\}}{1-2q\,Cos.\,ux+q^{2}}\,e^{s\,Cos.\,rx}\,Sin.\,x\,\frac{dx}{x^{2}}=\frac{\pi}{2}\left(e^{s}\,\frac{1-q^{t}}{1-q}-1\right)\ .\ (192),$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{Sin.(s\,Sin.\,rx)-q\,Sin.(s\,Sin.\,rx-ux)-q^{t}\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx+tux\}+q^{t+1}\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx+(t-1)ux\}}{1-2q\,Cos.\,ux+q^{2}}$$

$$e^{s\,Cos.\,rx}\,Sin.^{3}x\,\frac{dx}{x^{3}}=\frac{\pi}{8}\left\{\frac{1-q^{t}}{1-q}\,e^{s}\left(1-q\,s-\frac{q}{1-q}\right)-\frac{s\,e^{s}\,q^{t}}{1-q}-4\right\}\ \dots\ (193).$$

19. Toutes les intégrales, qu'on a trouvées jusqu'à présent, sont indépendantes des constantes r: or, c'est ce qui découle des intégrations dont on a fait usage pour parvenir aux théorèmes (I) à (XV). Encore arrive-t-il maintefois que les valeurs en outre ne dépendent pas des constantes s, ou de quelques-unes d'entre elles: circonstance, qui ne suit pas de ces intégrations et qu'il est plus difficile de tracer. Quant aux développements dans les Numéros 13, 15, 17, ils pourraient donner lieu à d'autres, où il se trouve divers facteurs semblables, comme nous en avons obtenu aux Numéros 4, 6, 7, 10; et même les fonctions à développer pourraient encore résulter de la combinaison de trois fonctions différentes, qui de nouveau donneraient lieu à divers cas spéciaux; — mais les intégrales elles-mêmes deviendraient d'une forme beaucoup trop compliquée, et ne pourraient bien servir que comme des équations de réduction ou plutôt de vérification; car déja les dernières suppositions donnent des formes moins simples, intéressantes pourtant à cause des résultats, qu'on en déduit.

D'autres ont déjà évalué par des méthodes en général bien différentes quelques-unes de nos intégrales, comme on l'a vu par-ci et par-là; ces résultats peuvent aussi servir pour vérifier la méthode exposée. Mais les autres intégrales sont nouvelles, et d'une forme encore peu connue, surtout celles, qui se trouvent aux Numéros 5,

---

[26] La somme et la différence de ces deux intégrales donnent:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{Sin.(s\,Sin.\,rx+x)-q\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx-(u-1)x\}-q^{t}\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx+(tu+1)x\}+q^{t+1}\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx+([t-1]u+1)x\}}{1-2q\,Cos.\,ux+q^{2}}\,e^{s\,Cos.\,rx}\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\,e^{s}\,\frac{1-q^{t}}{1-q}\ \dots\ (190),$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{Sin.(s\,Sin.\,rx-x)-q\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx-(u+1)x\}-q^{t}\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx+(tu-1)x\}+q^{t+1}\,Sin.\,\{s\,Sin.\,rx+([t-1]u-1)x\}}{1-2q\,Cos.\,ux+q^{2}}\,e^{s\,Cos.\,rx}\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\left\{e^{s}\,\frac{1-q^{t}}{1-q}-2\right\}\ \dots\ (191).$$

8, 11, 12: or, celles-ci se distinguent par un produit illimité de facteurs d'une certaine forme, et même de facteurs de formes différentes quelquefois.

Tout ce que nous venons d'observer ici ne porte pas seulement sur ce premier paragraphe, mais nous verrons que dans la suite les résultats donneront lieu à des remarques semblables.

---

§. II. DE QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES À DÉNOMINATEUR ALGÉBRIQUE BINÔME DE LA FORME q^a+x^a, $(q^a+x^a)^b$.

20. Dans les théorèmes (I) à (XV) on rencontre au dénominateur une fonction algébrique monôme de x, résultant des intégrales définies dont on s'était servi: mais parmi les intégrales à dénominateur binôme et à valeur connue, il se trouve aussi qui pourront donner lieu à de nouveaux théorèmes.

On a par exemple $\int_0^\infty Cos.ax \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} e^{-am} \ldots (q), \int_0^\infty Sin.ax \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-am} . (z)$ [27]; pour pouvoir en faire usage, il faut multiplier les développements (A), (C), (E) par $\frac{dx}{m^2+x^2}$, et les autres (B), (D), (F) par $\frac{xdx}{m^2+x^2}$, et puis intégrer ces produits entre les limites 0 et ∞; de telle sorte on aura:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} \left\{ f(\alpha) + \frac{\beta}{1} e^{-mr} \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2} e^{-2mr} \frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2m} f(\alpha + \beta e^{-mr}), \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(XVI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\beta}{1} e^{-mr} \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2} e^{-2mr} \frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ f(\alpha+\beta e^{-mr}) - f(\alpha) \right\}; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(XVII)}$$

et d'une manière analogue:

$$\int_0^\infty \frac{F_1(xi)+F_1(-xi)}{2} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} f(\alpha+\beta e^{-mr}, \alpha_1+\beta_1 e^{-mr_1}), \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(XVIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_1(xi)-F_1(-xi)}{2i} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} \left\{ f(\alpha+\beta e^{-mr}, \alpha_1+\beta_1 e^{-mr_1}) - f(\alpha,\alpha_1) \right\}, \quad . \quad \text{(XIX)}$$

---

[27] Voyez sur ces intégrales mes Tables d'intégrales définies, Table 205, N°. 6 et 5.

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\,f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1},\ldots), \quad \ldots\ldots \quad \text{(XX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2\,i}\,\frac{x\,dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\left\{f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1},\ldots)-f(\alpha,\alpha_1,\ldots)\right\}. \quad \text{(XXI)}$$

Avant de continuer observons que nous pouvons appliquer à ces théorèmes la différentiation successive par rapport à la constante m. Or, employons à cet effet les formules de Mr. GRUNERT:

$$\frac{d^c}{dm^c}\,\frac{x}{m^2+x^2} = (-1)^c\,1^{c/1}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}},$$

$$\frac{d^c}{dm^c}\,\frac{x}{m^2+x^2} = (-1)^c\,1^{c/1}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ [28]; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (v)$$

et déduisons des théorèmes (XVI), (XVII), (XX), (XXI), les formules suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[f(\alpha+\beta\,e^{-mr})], \quad \ldots \quad \text{(XXII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[\tfrac{1}{m}f(\alpha+\beta\,e^{-mr})], \quad \ldots \quad \text{(XXIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2\,i}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,x\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[m\,f(\alpha+\beta\,e^{-mr})], \quad \ldots \quad \text{(XXIV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2\,i}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[f(\alpha+\beta\,e^{-mr})], \quad \ldots \quad \text{(XXV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1},\ldots)], \quad \ldots \quad \text{(XXVI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[\tfrac{1}{m}f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1},\ldots)], \quad \text{(XXVII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2\,i}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,x\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[m\,f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1},\ldots)], \quad \text{(XXVIII)}$$

---

[28] Voyez le Journal de CRELLE, T. 8, p. 156.

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2\,i}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\,\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr},\ldots)\right]\ [29]. \quad \text{(XXIX)}$$

Retournons à notre recherche et employons maintenant des autres intégrales définies, celles-ci, par exemple:

$$\int_0^\infty Cos.\,ax\,\frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m^3}\,e^{-am}\,(Cos.\,am + Sin.\,am)\ (\psi),\quad \int_0^\infty Cos.\,ax\,\frac{x^2dx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{4m}\,e^{-am}\,(Cos.\,am - Sin.\,am)\ (\omega),\quad \int_0^\infty Sin.\,ax\,\frac{xdx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\,e^{-am}\,Sin.\,am\ (\alpha\alpha),$$

$$\int_0^\infty Sin.\,ax\,\frac{x^3dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{2}\,e^{-am}\,Cos.\,am\ [30]\ (\alpha\beta).$$

Avant de les appliquer à la recherche de théorèmes, remarquons que les développements (C), (D) sont compris dans les suivants plus généraux (E), (F), et s'en déduisent aisément, lorsqu'on s'y borne à deux fonctions: par suite dorénavant nous ne nous occuperons plus des fonctions F_1 ni des développements (C) et (D). Dès-lors multiplions les séries (A), (E), par $\frac{dx}{4m^4+x^4}$ et les autres (B), (F) par $\frac{xdx}{m^4+x^4}$ et intégrons entre les limites 0 et ∞ de x, afin d'obtenir les théorèmes suivants:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2}\,\frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m^3}\left\{f(\alpha)+\frac{\beta}{1}\,e^{-mr}\,(Cos.\,mr+Sin.\,mr)\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha}+\frac{\beta^2}{1.2}\,e^{-2mr}\right.$$

$$\left.(Cos.\,2mr+Sin.\,2mr)\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots\right\} = \frac{\pi}{8m^3}\left[\left\{f(\alpha)+\frac{\beta}{1}\,e^{-mr}\,Cos.\,mr\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha}+\frac{\beta^2}{1.2}\,e^{-2mr}\right.\right.$$

$$\left.\left.Cos.\,2\,mr\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots\right\}+\left\{\frac{\beta}{1}\,e^{-mr}\,Sin.\,mr\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha}+\frac{\beta^2}{1.2}\,e^{-2mr}\,Sin.\,2\,mr\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots\right\}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{16m^3}\left\{(1-i)\,f(\alpha+\beta\,e^{(1-i)mr})+(1+i)\,f(\alpha+\beta\,e^{-(1+i)mr})\right\},\ \ldots\ldots\ \text{(XXX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2}\,\frac{x^2dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m}\left[\left\{f(\alpha)+\frac{\beta}{1}\,e^{-mr}\,Cos.\,mr\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha}+\frac{\beta^2}{1.2}\,e^{-2mr}\right.\right.$$

---

[29] Comme les facteurs $\frac{1}{2}\left[F(xi)+F(-xi)\right]$ et $\frac{1}{2\,i}\left[F(xi)-F(-xi)\right]$ sont non seulement de la nature des fonctions *Cosinus* et *Sinus*, mais jouissent aussi souvent d'un tel facteur respectivement, les intégrales que ces théorèmes produisent peuvent souvent être combinées par voie d'addition et de soustraction, et fourniront ainsi une classe remarquable d'intégrales définies.

[30] On trouve ces intégrales Table 207, N°. 5 à 8; on en doit les deux premières à Poisson, les deux dernières à Helmling.

$$Cos.2mr\frac{d^2f(a)}{da^2}+\dots\Big\} - \Big\{\frac{\beta}{1}e^{-mr}\,Sin.mr\frac{df(a)}{da}+\frac{\beta^2}{1.2}e^{-2mr}\,Sin.2mr\frac{d^2f(a)}{da^2}+\dots\Big\}\Big] =$$

$$=\frac{\pi}{8m}\Big\{(1+i)\,f(a+\beta\,e^{-(1-i)mr})+(1-i)\,f(a+\beta\,e^{-(1+i)mr})\Big\}, \quad \text{(XXXI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\,\frac{xdx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{4m^2}\Big\{\frac{\beta}{1}e^{-mr}\,Sin.mr\frac{df(a)}{da}+\frac{\beta^2}{1.2}e^{-2mr}\,Sin.2mr\frac{d^2f(a)}{da^2}+\dots\Big\}=$$

$$=\frac{\pi}{8m^2i}\Big\{f(a+\beta\,e^{-(1-i)mr})-f(a+\beta\,e^{-(1+i)mr})\Big\}, \quad \text{(XXXII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\,\frac{x^3dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{2}\Big\{\frac{\beta}{1}e^{-mr}\,Cos.mr\frac{df(a)}{da}+\frac{\beta^2}{1.2}e^{-2mr}\,Cos.2mr\frac{d^2f(a)}{da^2}+\dots\Big\}=$$

$$=\frac{\pi}{4}\Big\{f(a+\beta\,e^{-(1-i)mr})+f(a+\beta^{-(1+i)2mr})-2f(a)\Big\}; \quad \text{(XXXIII)}$$

et par conséquent nous aurons tout de suite les théorèmes généraux analogues:

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,\frac{dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{16m^3}\Big\{(1-i)\,f(a+\beta\,e^{-(1-i)mr},\ a_1+\beta_1\,e^{-(1-i)mr},\dots)+$$

$$+(1+i)\,f(a+\beta\,e^{-(1+i)mr},\ a_1+\beta_1\,e^{-(1+i)mr},\dots)\Big\}, \quad \text{(XXXIV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,\frac{x^2dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{8m}\Big\{(1+i)\,f(a+\beta\,e^{-(1-i)mr},\ a_1+\beta_1\,e^{-(1-i)mr},\dots)+$$

$$+(1-i)\,f(a+\beta\,e^{-(1+i)mr},\ a_1+\beta_1\,e^{-(1+i)mr},\dots)\Big\}, \quad \text{(XXXV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{xdx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{8m^2i}\Big\{f(a+\beta\,e^{-(1-i)mr},\ a_1+\beta_1\,e^{-(1-i)mr},\dots)-$$

$$-f(a+\beta\,e^{-(1+i)mr},\ a_1+\beta_1\,e^{-(1+i)mr},\dots)\Big\}, \quad \text{(XXXVI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{x^3dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{4}\Big\{f(a+\beta\,e^{-(1-i)mr},\ a_1+\beta_1\,e^{-(1-i)mr},\dots)+$$

$$+f(a+\beta\,e^{-(1+i)mr},\ a_1+\beta_1\,e^{-(1+i)mr},\dots)-2f(a,a_1,\dots)\Big\}. \quad \text{(XXXVII)}$$

Encore a-t-on les intégrales $\int_0^\infty Cos.ax\frac{xSi.(x)dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4}e^{-am}\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}$ $(a\gamma)$, $\int_0^\infty Cos.ax\frac{Ci.(x)dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4m}(e^{am}+e^{-am})\,Ei.(-m)$ $(a\delta)$, $\int_0^\infty Sin.ax\frac{Si.(x)dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4m}e^{-am}\{Ei.(m)-$ $-Ei.(-m)\}$ $(a\varepsilon)$, $\int_0^\infty Sin.ax\frac{xCi.(x)dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4}(e^{-am}-e^{am})\,Ei.(-m)$ $(a\zeta)$ [31]. Pour employer ces intégrales il faut multiplier les séries (A), (E) par $\frac{xSi.(x)dx}{m^2+x^2}$ et par $\frac{Ci.(x)dx}{m^2+x^2}$, et les séries (B) et (F) par $\frac{Si.(x)dx}{m^2+x^2}$ et par $\frac{xCi.(x)dx}{m^2+x^2}$, et puis intégrer les produits entre les limites 0 et ∞; or, ainsi l'on trouve:

[31] Voyez Table 435, N°. 9, 5, 3, 7. Des valeurs qu'obtiennent les deux premières intégrales $(a\gamma)$ et $(a\delta)$ pour $a=0$, voyez mon „Exposé de la théorie, etc." (Verhand. Kon. Akad. van Wetensch. Tome VIII), Partie III. Méth. 20.

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2}\, Si.(x)\, \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\,\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\,\Big\{f(\alpha)+\frac{\beta}{1}\,e^{-mr}\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha}+$$

$$+\frac{\beta^2}{1.2}\,e^{-2mr}\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots\Big\} = \frac{\pi}{4}\,\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\,f(\alpha+\beta\,e^{-mr}),\quad\ldots\quad \text{(XXXVIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2}\, Ci.(x)\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4m}\,Ei.(-m)\,\Big\{2f(\alpha)+\frac{\beta}{1}\,(e^{mr}+e^{-mr})\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha}+$$

$$+\frac{\beta^2}{1.2}\,(e^{2mr}+e^{-2mr})\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots\Big\} = \frac{\pi}{4m}\,Ei.(-m)\,\{f(\alpha+\beta\,e^{mr})+f(\alpha+\beta\,e^{-mr})\},\quad \text{(XXXIX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2\,i}\, Si.(x)\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4m}\,\{Ei.(m)-Ei.(-m)\}\,\Big\{\frac{\beta}{1}\,e^{-mr}\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha}+$$

$$+\frac{\beta^2}{1.2}\,e^{-2mr}\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots\Big\} = \frac{\pi}{4m}\,\{Ei.(m)-Ei.(-m)\}\,\{f(\alpha+\beta\,e^{-mr})-f(\alpha)\},\quad \text{(XL)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2\,i}\, Ci.(x)\, \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\,Ei.(-m)\,\Big\{\frac{\beta}{1}\,(e^{-mr}-e^{mr})\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha}+$$

$$+\frac{\beta^2}{1.2}\,(e^{-2mr}-e^{2mr})\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots\Big\} = \frac{\pi}{4}\,Ei.(-m)\,\{f(\alpha+\beta\,e^{-mr})-f(\alpha+\beta\,e^{mr})\};\quad \text{(XLI)}$$

et d'une manière analogue tout aussi bien:

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\, Si.(x)\, \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\,\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\,f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr},\ldots),\quad \text{(XLII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\, Ci.(x)\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4m}\,Ei.(-m)\,\{f(\alpha+\beta\,e^{mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{mr},\ldots)+$$

$$+f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr},\ldots)\},\quad\ldots\quad \text{(XLIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2\,i}\, Si.(x)\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4m}\,\{Ei.(m)-Ei.(-m)\}\,\{f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr},\ldots)-$$

$$-f(\alpha,\alpha_1,\ldots)\},\quad\ldots\quad \text{(XLIV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2\,i}\, Ci.(x)\, \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\,Ei.(-m)\,\{f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr},\ldots)-$$

$$-f(\alpha+\beta\,e^{mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{mr},\ldots)\}.\quad\ldots\quad \text{(XLV)}$$

Comme nous l'avons fait auparavant, nous pourrions appliquer à ces théorèmes (XXXVIII) à (XLV) la différentiation successive par rapport à la constante m, par l'intermédiaire des mêmes formules (v): mais nous écrirons seulement les résultats qu'on obtient par les quatre dernières équations, et qui par le changement de F_a en F, et par l'évanouissement des α_1, β_1, $\gamma_1,\ldots$, deviendront les mêmes, qu'on obtiendrait pour les quatre premières: alors nous trouverons:

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,\frac{Cos.\,\Big\{(c+1)\,Arctg.\,\frac{x}{m}\Big\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,x\,Si.(x)\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[m\,\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}$$

$$f(\alpha+\beta\,e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\,e^{-mr},\ldots)],\quad\ldots\quad \text{(XLVI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Ci.(x)\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[Ei.(-m)\left\{f(\alpha+\beta\, e^{mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1},\ldots)+f(\alpha+\beta\, e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots)\right\}\right], \quad \text{(XLVII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\} f(\alpha+\beta\, e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots)\right], \quad \text{(XLVIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Ci.(x)\,\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}Ei.(-m)\left\{f(\alpha+\beta\, e^{mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1},\ldots)+f(\alpha+\beta\, e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots)\right\}\right], \quad \text{(XLIX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(m)-Ei.(-m)\right\}\left\{f(\alpha+\beta\, e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots)-f(\alpha,\alpha_1,\ldots)\right\}\right]\ [32], \quad \text{(L)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,x\,Ci.(x)\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[m\,Ei.(-m)\left\{f(\alpha+\beta\, e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots)-f(\alpha+\beta\, e^{mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1},\ldots)\right\}\right], \quad \text{(LI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}\left\{Ei.(m)-Ei.(-m)\right\}\left\{f(\alpha+\beta\, e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots)-f(\alpha,\alpha_1,\ldots)\right\}\right], \quad \text{(LII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Ci.(x)\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[Ei.(-m)\left\{f(\alpha+\beta\, e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots)-f(\alpha+\beta\, e^{mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1},\ldots)\right\}\right]\ [33]. \quad \text{(LIII)}$$

---

[32] Lorsqu'on observe que les fonctions $\frac{1}{2}\left[F_a(xi)+F_a(-xi)\right]$ et $\frac{1}{2i}\left[F_a(xi)-F_a(-xi)\right]$ possèdent en général le caractère d'un *Cosinus* et d'un *Sinus* respectivement, et que souvent elles ont un facteur de ce genre, on en déduit facilement que la somme et la différence des intégrales qui résultent des théorèmes (XLVIII) et (L) obtiendront une forme simple monôme, et que les valeurs de ces intégrales souvent deviendront plus simples ici que celles des intégrales primitives.

[33] L'observation de la Note précédente vaut tout de même à l'égard des théorèmes (XLVII) et (LIII), et ici encore la combination par voie d'addition et de soustraction simplifie beaucoup les valeurs des intégrales respectives. Ici nous trouverons des intégrales à facteur $Si.(x)$: dans la Note précédente elles auront un facteur $Ci.(x)$.

6 *

21. Maintenant passons à l'application de ces théorèmes aux développements, que nous avons trouvés au paragraphe précédent: et commençons par les formules (a) à (f) du N°. 4. Nous y avons $f(\alpha)=1$, $f(\alpha+\beta\, e^{\pm mr})=(1+e^{\pm mr})^s$, $f(\alpha+\beta\, e^{-(1+i)mr})=$ $=(1+e^{-(1-i)mr})^s=\{(1+e^{-mr}\,Cos.mr)+i(e^{-mr}\,Sin.mr)\}^s=(X+Yi)^s$, lorsqu'on y fait $X=1+e^{-mr}\,Cos.mr$, $Y=e^{-mr}\,Sin.mr$. Afin d'employer ici la méthode connue de transformation $(X+Yi)^s=R^s\,(Cos.s\psi+i\,Sin.s\psi)$, il faut faire $R^2=X^2+Y^2=$ $=1+2\,e^{-mr}\,Cos.mr+e^{-2mr}$, $Tang.\psi=\frac{Y}{X}=\frac{e^{-mr}\,Sin.mr}{1+e^{-mr}\,Cos.mr}=\frac{Sin.mr}{e^{mr}+Cos.mr}$: alors nous aurons $f(\alpha+\beta\,e^{-(1-i)mr})=(1+2e^{-mr}\,Cos.mr+e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}\left[Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.mr}{e^{mr}+Cos.mr}\right)\right\}+\right.$ $\left.+\,i\,Sin.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.mr}{e^{mr}+Cos.mr}\right)\right\}\right]$, et tout de même, en changeant le signe de i: $f(\alpha+\beta\,e^{-(1+i)mr})=(1+2\,e^{-mr}\,Cos.mr+e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}\left[Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.mr}{e^{mr}+Cos.mr}\right)\right\}-\right.$ $\left.-\,i\,Sin.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.mr}{e^{mr}+Cos.mr}\right)\right\}\right]$. Par suite,—lorsque nous omettons les théorèmes (XVIII) et (XIX) pour les $F_1(x)$, comme nous avons omis dans la suite tous les théorèmes pour cette forme spéciale, comprise dans la forme générale $F_0(x)$; — nous trouverons pour des r doubles:

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.srx\,\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{s+1}m}(1+e^{-2mr})^s\ \ldots\ (194),\quad \int_0^\infty Cos.^s rx.\,Sin.srx\,\frac{xdx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{s+1}}\left\{(1+e^{-2mr})^s-1\right\}\ \ldots\ (195),$$

[34] $$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1} r_1 x\ldots\,Cos.\left\{(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{dx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}m}(1+e^{-2mr})^s\,(1+e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\ \ldots\ldots\ (196),\quad \int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1} r_1 x\ldots$$

$$Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}}\left\{(1+e^{-2mr})^s\,(1+e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots-1\right\}\ \ldots\ (197),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.srx\,\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{s+1}}\,\frac{d^c}{dm^c}(1+e^{-2mr})^s\ \ldots\ldots\ (198),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.srx\,\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,\frac{dx}{x}=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{s+1}}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}(1+e^{-2mr})^s\right]\ \ldots\ (199),$$

---

[34] Pour la valeur spéciale, l'unité, de r j'ai déjà déduit ces intégrales dans un Mémoire: „Réduction des intégrales définies générales etc." inséré dans les Verhandel. der Konink. Akademie van Wetensch., Tome V: on les y trouve formules (1) et (5).

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\, Cos.srx \frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\, xdx = \frac{(-1)^c}{1^{c\vert 1}} \frac{\pi}{2^{s+1}} \frac{d^c}{dm^c}\left[m(1+e^{-2mr})^s - m\right] \ \ldots\ (200),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\, Cos.srx \frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\, dx = \frac{(-1)^c}{1^{c\vert 1}} \frac{\pi}{2^{s+1}} \frac{d^c}{dm^c}(1+e^{-2mr})^s \ \ldots\ (201),\ [35]$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ \ Cos.^{s_1} r_1 x \ldots\ \ Cos.\left\{(sr+s_1 r_1+\ldots)x\right\} \frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^c}{1^{c\vert 1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c}\left[(1+e^{-2mr})^s (1+e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots\right] \ \ldots\ (204),\ \int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \ldots$$
$$Cos.\left\{(sr+s_1 r_1+\ldots)x\right\} \frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c\vert 1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}(1+e^{-2mr})^s\right.$$
$$\left.(1+e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\right] \ldots (205),\ \int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(sr+s_1 r_1+\ldots)x\right\} \frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\, xdx =$$
$$= \frac{(-1)^c}{1^{c\vert 1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c}\left[m(1+e^{-2mr})^s (1+e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots - m\right] \ \ldots\ (206),\ \int_0^\infty Cos.^s rx.$$
$$Cos.^{s_1} r_1 x \ldots Sin.\left\{(sr+s_1 r_1+\ldots)x\right\} \frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\, dx = \frac{(-1)^c}{1^{c\vert 1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c}\left[(1+e^{-2mr})^s\right.$$
$$\left.(1+e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\right] \ldots (207),\ [36]\ \int_0^\infty Cos.^s rx.\, Cos.srx \frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{2^{s+3}m^3}(1+2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\ \text{[illegible]}$$

---

[35] La somme et la différence des intégrales (198) et (201) donnent:

$$\int_0^\infty Cos.^s rx \frac{Cos.\left\{srx-(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\, dx = \frac{(-1)^c}{1^{c\vert 1}} \frac{\pi}{2^s} \frac{d^c}{dm^c}(1+e^{-2mr})^s \ \ldots\ (202),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx \frac{Cos.\left\{srx+(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\, dx = 0 \ \ldots\ (203).$$

[36] Combinons les formules (204) et (207) par voie d'addition et de soustraction, il viendra:

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ \ Cos.^{s_1} r_1 x \ldots \frac{Cos.\left\{(sr+s_1 r_1+\ldots)x - (c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^c}{1^{c\vert 1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots}} \frac{d^c}{dm^c}\left[(1+e^{-2mr})^s (1+e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots\right] \ \ldots\ (208),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ \ Cos.^{s_1} r_1 x \ldots \frac{Cos.\left\{(sr+s_1 r_1+\ldots)x + (c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\, dx = 0 \ \ldots\ (209).$$

$\left[Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)\right\} + Sin.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)\right\}\right]$ ... (210), $\int_0^\infty Cos.^s rx.$ $Cos.srx\,\frac{x^2dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{2^{s+2}m}(1+2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\left[Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)\right\}-\right.$ $\left.-\,Sin.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)\right\}\right]$ .... (211), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin.srx\,\frac{xdx}{4m^4+x^4}=$ $=\frac{\pi}{2^{s+2}m^2}(1+2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\ Sin.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)\right\}$ .... (212), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin.srx\,\frac{x^3dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{2^{s+1}}\left[(1+2e^{-2mr}\ Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\right.$ $\left.Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)\right\}-1\right]$ ...(213), $\int_0^\infty Cos.^s rx.Cos.^{s_1}r_1x...Cos.\left\{(sr+s_1r_1+...)x\right\}\frac{dx}{4m^4+x^4}=$ $=\frac{\pi}{2^{s+s_1+...+3}m^3}(1+2e^{-2mr}\ Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\ (1+2e^{-2mr_1}\ Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}...$ $\left[Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)+s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}+Cos.2mr_1}\right)+...\right\}+\right.$ $\left.+\,Sin.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)+s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}+Cos.2mr_1}\right)+...\right\}\right]$ ... (214), $\int_0^\infty Cos.^s rx.$ $Cos.^{s_1}r_1x...\ Cos.\left\{(sr+s_1r_1+...)x\right\}\frac{x^2dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}m}(1+2e^{-2mr}\ Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}$ $(1+2e^{-2mr_1}\ Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}...\ \left[Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)+\right.\right.$ $\left.+\,s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}+Cos.2mr_1}\right)+...\right\}-\,Sin.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)+\right.$ $\left.\left.+\,s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}+Cos.2mr_1}\right)+...\right\}\right]$ .... (215), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1}r_1x...$ $Sin.\left\{(sr+s_1r_1+...)x\right\}\frac{xdx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}m^2}(1+2e^{-2mr}\ Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}$ $(1+2e^{-2mr_1}\ Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}...\ Sin.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)+\right.$ $\left.+\,s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}+Cos.2mr_1}\right)+...\right\}$ ... (216), $\int_0^\infty Cos.^s rx.Cos.^{s_1}r_1x...Sin.\left\{(sr+s_1r_1+...)x\right\}\frac{x^3dx}{4m^4+x^4}=$ $=\frac{\pi}{2^{s+s_1+...+1}}\left[(1+2e^{-2mr}\ Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\ (1+2e^{-2mr_1}\ Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}...\right.$ $\left.Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}+Cos.2mr}\right)+s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}+Cos.2mr_1}\right)+...\right\}-1\right]$ ... (217), $\int_0^\infty Cos.^s rx.$ $Cos.srx.Si.(x)\,\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{s+2}}\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}(1+e^{-2mr})^s$ ... (218), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.srx.$

$Ci.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2}m} Ei.(-m) \{ (1+e^{2mr})^s + (1+e^{-2mr})^s \} = \frac{\pi}{2^{s+2}m} Ei.(-m) (e^{mr}+e^{-mr})^s$ $(e^{smr}+e^{-smr})$ ... (219), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin. srx.\ Si.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2}m} \{ Ei.(m) - Ei.(-m) \}$ $\{ (1+e^{-2mr})^s - 1 \}$ ... (220), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin. srx.\ Ci.(x) \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2}} Ei.(-m) (e^{mr}+e^{-mr})^s$ $(e^{-smr} - e^{smr})$ ... (221), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x ... Cos. \{ (sr+s_1 r_1+...)x \}.\ Si.(x) \frac{xdx}{m^2+x^2} =$ $= \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}} \{ Ei.(-m) - Ei.(m) \} (1+e^{-2mr})^s (1+e^{-2mr_1})^{s_1} ...$ ... (222), $\int_0^\infty Cos.^s rx.$ $Cos.^{s_1} r_1 x ... Cos. \{ (sr+s_1 r_1+...)x \}.\ Ci.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}m} Ei.(-m) (e^{mr}+e^{-mr})^s$ $(e^{mr_1}+e^{-mr_1})^{s_1} ... (e^{(sr+s_1 r_1+...)m} + e^{-(sr+s_1 r_1+...)m})$ ... (223), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x ...$ $Sin. \{ (sr+s_1 r_1+...)x \}.\ Si.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}m} \{ Ei.(m) - Ei.(-m) \} \{ (1+e^{-2mr})^s$ $(1+e^{-2mr_1})^{s_1} ... - 1 \}$ ... (224), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x ... Sin. \{ (sr+s_1 r_1+...)x \}.\ Ci.(x) \frac{xdx}{m^2+x^2} =$ $= \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}} Ei.(-m) (e^{mr}+e^{-mr})^s (e^{mr_1}+e^{-mr_1})^{s_1} ... \{ e^{-(sr+s_1 r_1+...)m} - e^{(sr+s_1 r_1+...)m} \}$. (225), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x ... Cos. \{ (sr+s_1 r_1+...)x \} \frac{Cos. \{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Si.(x)\ dx =$ $= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}} \frac{d^c}{dm^c} [m \{ Ei.(-m) - Ei.(m \} (1+e^{-2mr})^s (1+e^{-2mr_1})^{s_1} ...]$ ... (226), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x ... Cos. \{ (sr+s_1 r_1+...)x \} \frac{Cos. \{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Ci.(x)\ dx =$ $= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}} \frac{d^c}{dm^c} [Ei.(-m) (e^{mr}+e^{-mr})^s (e^{mr_1}+e^{-mr_1})^{s_1} ... (e^{(sr+s_1 r_1+...)m} +$ $+ e^{-(sr+s_1 r_1+...)m})]$ .... (227), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x ... Cos. \{ (sr+s_1 r_1+...)x \}$ $\frac{Sin. \{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Si.(x)\ dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}} \frac{d^c}{dm^c} [\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \} (1+e^{-2mr})^s$ $(1+e^{-2mr_1})^{s_1} ...]$ .... (228), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x ... Cos. \{ (sr+s_1 r_1+...)x \}$ $\frac{Sin. \{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Ci.(x) \frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+2}} \frac{d^c}{dm^c} [\frac{1}{m} Ei.(-m) (e^{mr}+e^{-mr})^s$

$(e^{mr_1}+e^{-mr_1})^{s_1}\dots \left\{ e^{(sr+s_1r_1+\dots)m} + e^{-(sr+s_1r_1+\dots)m} \right\}] \dots$ (229), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \dots$

$$Sin. \left\{ (sr+s_1r_1+\dots)x \right\} \frac{Cos. \left\{ (c+1)\ Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Si.(x)\ dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+2}} \frac{d^c}{dm^c} [\left\{ Ei.(m) - \right.$$

$- Ei.(-m) \} \left\{ (1+e^{-2mr})^s\ (1+e^{-2mr_1})^{s_1} \dots -1 \right\}] \dots$ (230), [37] $\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \dots$

$$Sin. \left\{ (sr+s_1r_1+\dots)x \right\} \frac{Cos. \left\{ (c+1)\ Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ x\,Ci.(x)\ dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+2}} \frac{d^c}{dm^c} [m\ Ei.(-m)$$

$(e^{mr}+e^{-mr})^s\ (e^{mr_1}+e^{-mr_1})^{s_1}\dots \left\{ e^{-(sr+s_1r_1+\dots)m} - e^{(sr+s_1r_1+\dots)m} \right\}] \dots\dots\dots$ (233),

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ \ Cos.^{s_1} r_1 x \dots\ \ Sin. \left\{ (sr+s_1r_1+\dots)x \right\} \frac{Sin. \left\{ (c+1)\ Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Si.(x)\ \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+2}} \frac{d^c}{dm^c} [\frac{1}{m} \left\{ Ei.(m) - Ei.(-m) \right\} \left\{ (1+e^{-2mr})^s\ (1+e^{-2mr_1})^{s_1} \dots -1 \right\}] \dots (234),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ \ Cos.^{s_1} r_1 x \dots\ \ Sin. \left\{ (sr+s_1r_1+\dots)x \right\} \frac{Sin. \left\{ (c+1)\ Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Ci.(x)\ dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+2}} \frac{d^c}{dm^c} [Ei.(-m)\ (e^{mr}+e^{-mr})^s\ (e^{mr_1}+e^{-mr_1})^{s_1}\dots (e^{-(sr+s_1r_1+\dots)m} -$$

$- e^{(sr+s_1r_1+\dots)m})] \dots$ (235). [38]

---

[37] Par voie d'addition et de soustraction les intégrales (228) et (230) donnent:

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \dots \frac{Sin. \left\{ (sr+s_1r_1+\dots)x - (c+1)\ Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Si.(x)\ dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+2}} \frac{d^c}{dm^c} [\left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} \left\{ 2(1+e^{-2mr})^s\ (1+e^{-2mr_1})^{s_1} \dots -1 \right\}] \dots (231).$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \dots \frac{Sin. \left\{ (sr+s_1r_1+\dots)x + (c+1)\ Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Si.(x)\ dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+2}} \frac{d^c}{dm^c} [Ei.(-m) - Ei.(m)] \dots (232).$$

[38] Lorsqu'on prend la somme et la différence des intégrales (227) et (235) on obtient:

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \dots \frac{Cos. \left\{ (sr+s_1r_1+\dots)x - (c+1)\ Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Ci.(x)\ dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}} \frac{d^c}{dm^c} [Ei.(-m)\ e^{-(sr+s_1r_1+\dots)m}\ (e^{mr}+e^{-mr})^s\ (e^{mr_1}+e^{-mr_1})^{s_1}\dots] \dots (236).$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \dots \frac{Cos. \left\{ (sr+s_1r_1+\dots)x + (c+1)\ Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Ci.(x)\ dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\dots+1}} \frac{d^c}{dm^c} [Ei.(-m)\ e^{(sr+s_1r_1+\dots)m}\ (e^{mr}+e^{-mr})^s\ (e^{mr_1}+e^{-mr_1})^{s_1}\dots] \dots (237).$$

22. Pour l'application des formules suivantes, où les facteurs $Sin.^s rx$ remplacent les facteurs $Cos.^s rx$, c'est-à-dire pour les développements (g) à (m) du N°. 4, on a: $f(\alpha)=1$, $f(\alpha+\beta e^{\pm mr}) = (1-e^{\pm mr})^s$, $f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr}) = (1-e^{-(1-i)mr})^s = \{(1-e^{-mr} Cos.mr) - i(e^{-mr} Sin.mr)\}^s = (X_1 - Y_1 i)^s$; quand on fait $X_1 = 1-e^{-mr} Cos.mr$, $Y_1 = e^{-mr} Sin.mr$. En poursuivant le raisonnement du N°. précédent, nous en déduirons successivement $R_1^2 = (X_1)^2+(Y_1)^2 = 1-2e^{-mr} Cos.mr+e^{-2mr}$, $Tang.\Psi_1 = \frac{Y_1}{X_1} = \frac{e^{-mr} Sin.mr}{1-e^{-mr} Cos.mr} = \frac{Sin.mr}{e^{mr}-Cos.mr}$, et donc, puisque ici $(X_1-Y_1 i)^s = R_1^s (Cos.s\Psi_1 - i Sin.s\Psi_1)$ encore $f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr}) = (1-2e^{-mr} Cos.mr+e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s} [Cos.\{s Arctg.\left(\frac{Sin.mr}{e^{mr}-Cos.mr}\right)\} - i Sin.\{s Arctg.\left(\frac{Sin.mr}{e^{mr}-Cos.mr}\right)\}]$, et enfin par le changement du signe de i: $f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr}) = (1-2e^{-mr} Cos.mr+e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s} [Cos.\{s Arctg\left(\frac{Sin.mr}{e^{mr}-Cos.mr}\right)\} + i Sin.\{s Arctg.\left(\frac{Sin.mr}{e^{mr}-Cos.mr}\right)\}]$. Par l'usage de toutes ces valeurs spéciales les mêmes théorèmes, employés au Numéro précédent, fourniront ici, lorsqu'on prend de plus $2r$ au lieu de r:

$\int_0^\infty Sin^s rx.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - srx) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}m}(1-e^{-2mr})^s$ ... (238), [39] $\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - srx) \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}} \{1-(1-e^{-2mr})^s\}$ ... (239), [40] $\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x ... Cos.\{(s+s_1+...)\frac{1}{2}\pi - (sr+s_1 r_1+...)x\} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+1}m}(1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} ...$ ... (240), $\int_0^\infty Sin.^s rx. Sin^{s_1} r_1 x ... Sin.\{(s+s_1+...)\frac{1}{2}\pi - (sr+s_1 r_1+...)x\} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+...+1}} \{1-(1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} ...\}$ ...... (241), $\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - srx) \frac{Cos.\{(c+1) Arctg.\frac{x}{m}\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} dx =$

---

[39] Pour le cas spécial de $r=1$, et de $s=2a$ ou $=2a+1$, j'avais déduit cette même intégrale dans un Mémoire dans le Tome V des „Verhand. d. Kon. Akademie van Wetensch. (voyez encore Note [34]), où elles ont les numéros (60) et (61).

[40] Dans le Mémoire, cité dans la dernière Note, je trouvais la même intégrale sous les formules (68) et (69), lorsqu'on prend $r=1$, et s respectivement $2a$ et $2a+1$. Il est curieux d'observer, que la méthode, exposée dans le Mémoire cité, et qui ne manque pas de points de comparaison et de rapport avec la méthode actuellement en discussion, donne les mêmes intégrales au point de départ pour ainsi dire (consultez encore les Notes [34] et [39]), tandis qu'ensuite les chemins qu'elles suivent, divergent tout-à-fait et mènent à des résultats de tout autre genre, quoique portant sur les mêmes genres de fonctions.

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+1}}\frac{d^c}{dm^c}(1-e^{-2mr})^s \ldots (242), \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)\frac{Sin.\left\{(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+1}}\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}(1-e^{-2mr})^s\right] \ldots (243), \int_0^\infty Sin.^s rx. Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}xdx=$$

$$=\frac{(-1)^{c+1}}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+1}}\frac{d^c}{dm^c}\left[m\left\{(1-e^{-2mr})^s-1\right\}\right] \ldots\ldots (244), \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)$$

$$\frac{Sin.\left\{(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx=\frac{(-1)^{c+1}}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+1}}\frac{d^c}{dm^c}(1-e^{-2mr})^s \ldots (245),\ [41]\ \int_0^\infty Sin.^s rx.$$

$$Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{Cos.\left\{(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}}\frac{d^c}{dm^c}\left[(1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\right] \ldots (248), \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$$

$$Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{Sin.\left\{(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}}\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}(1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\right] \ldots (249), \int_0^\infty Sin.^s rx.$$

$$Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{Cos.\left\{(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}xdx=$$

$$=\frac{(-1)^{c+1}}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}}\frac{d^c}{dm^c}\left[m\left\{(1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots-1\right\}\right] \ldots\ldots (250),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{Sin.\left\{(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx=$$

$$=\frac{(-1)^{c+1}}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}}\frac{d^c}{dm^c}\left\{(1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\right\} \ldots\ldots (251), \int_0^\infty Sin.^s rx.$$

---

[41] D'où par l'addition et la soustraction des intégrales (242) et (245):

$$\int_0^\infty Sin.^s rx \frac{Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi - srx + (c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^s}\frac{d^c}{dm^c}(1-e^{-2mr})^s \ldots (246),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx \frac{Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi - srx - (c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx=0 \ldots (247).$$

$$Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)\frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{2^{s+3}m^3}(1-2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\Big[Cos.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big)\Big\} -$$

$$- Sin.\Big\{s\,Arctg\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big)\Big\}\Big] \;\ldots\ldots\; (252), \quad \int_0^\infty Sin.^s rx.\; Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)\frac{x^2dx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+2}m}(1-2e^{-2mr}\;Cos.2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\;\Big[Cos.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big)\Big\} +$$

$$+ Sin.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big)\Big\}\Big] \;\ldots\; (253), \quad \int_0^\infty Sin.^s rx.\; Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)\frac{xdx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+2}m^2}(1-2e^{-2mr}\;Cos.2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\;Sin.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big)\Big\} \;\ldots\; (254),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\; Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)\frac{x^3dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{2^{s+1}}\Big[1-(1-2e^{-2mr}\;Cos.2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}$$

$$Cos.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big)\Big\}\Big] \;\ldots\; (255), \quad \int_0^\infty Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\; Cos.\Big\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$$

$$-(sr+s_1r_1+\ldots)x\Big\}\frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+3}m^3}(1-2e^{-2mr}\;Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}(1-2e^{-2mr_1}$$

$$Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\ldots\;\Big[Cos.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big)+s_1\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\Big)+\ldots\Big\} -$$

$$- Sin.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big) + s_1\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\Big)+\ldots\Big\}\Big] \;\ldots\ldots\ldots\; (256),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\quad Sin.^{s_1} r_1 x\ldots\quad Cos.\Big\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x\Big\}\frac{x^2dx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}m}(1-2e^{-2mr}\;Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}(1-2e^{-2mr_1}\;Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\ldots$$

$$\Big[Cos.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big) + s_1\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\Big)+\ldots\Big\} +$$

$$+ Sin.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big) + s_1\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\Big)+\ldots\Big\}\Big] \;\ldots\ldots\; (257),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\quad Sin.^{s_1} r_1 x\ldots\quad Sin.\Big\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x\Big\}\frac{xdx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}m^2}(1-2e^{-2mr}\;Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}(1-2e^{-2mr_1}\;Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\ldots$$

$$Sin.\Big\{s\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\Big) + s_1\,Arctg.\Big(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\Big)+\ldots\Big\} \;\ldots\ldots\; (258),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\quad Sin.^{s_1} r_1 x\ldots\quad Sin.\Big\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x\Big\}\frac{x^3dx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}}\Big[1-(1-2e^{-2mr}\;Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}(1-2e^{-2mr_1}\;Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\ldots$$

$Cos. \left\{ s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr} \right) + s_1\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr_1}{e^{2mr_1} - Cos.\, 2mr_1} \right) + \ldots \right\}] \ \ldots \ (259),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ Si.(x) \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2}} \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} (1-e^{-2mr})^s \ \ldots \ (260),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ Ci.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2} m} Ei.(-m) \left\{ (1-e^{2mr})^s + (1-e^{-2mr})^s \right\} =$

$= \frac{\pi}{2^{s+2} m} Ei.(-m)\ (e^{mr} - e^{-mr})^s \left\{ (-1)^s e^{smr} + e^{-smr} \right\} \ \ldots\ldots \ (261),\ \int_0^\infty Sin.^s rx.$

$Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ Si.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2} m} \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} \left\{ (1-e^{-2mr})^s - 1 \right\} \ldots (262),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ Ci.(x) \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2}} Ei.(-m) \left\{ (1-e^{2mr})^s - (1-e^{-2mr})^s \right\} =$

$= \frac{\pi}{2^{s+2}} Ei.(-m)\ (e^{mr} - e^{-mr})^s \left\{ (-1)^s e^{smr} - e^{-smr} \right\} \ \ldots \ (263),\ \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$

$Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x \right\}.\ Si.(x) \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}} \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\}$

$(1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots \ \ldots \ (264),\ \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - \right.$

$\left. - (sr+s_1r_1+\ldots)x \right\}.\ Ci.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2} m} Ei.(-m)\ (e^{mr} - e^{-mr})^s\ (e^{mr_1} - e^{-mr_1})^{s_1} \ldots$

$\left\{ (-1)^{s+s_1+\ldots} e^{(sr+s_1r_1+\ldots)m} + e^{-(sr+s_1r_1+\ldots)m} \right\} \ \ldots\ldots\ldots \ (265),\ \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$

$Sin. \left\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x \right\}.\ Si.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2} m} \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\}$

$\left\{ (1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots - 1 \right\} \ \ldots \ (266),\ \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin. \left\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - \right.$

$\left. - (sr+s_1r_1+\ldots)x \right\}.\ Ci.(x) \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2}} Ei.(-m)\ (e^{mr} - e^{-mr})^s\ (e^{mr_1} - e^{-mr_1})^{s_1} \ldots$

$\left\{ (-1)^{s+s_1+\ldots} e^{(sr+s_1r_1+\ldots)m} - e^{-(sr+s_1r_1+\ldots)m} \right\} \ \ldots\ldots\ldots \ (267),\ \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$

$Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x \right\} \frac{Cos. \left\{ (c+1)\, Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ x\, Si.(x)\ dx =$

$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}} \frac{d^c}{dm^c} \left[m \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} (1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots \right] \ \ldots \ (268),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x \right\} \frac{Cos. \left\{ (c+1)\, Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Ci.(x)\ dx =$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}}\frac{d^c}{dm^c}\left[Ei.(-m)\,(e^{mr}-e^{-mr})^s\,(e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\ldots\left\{(-1)^{s+s_1+\ldots}e^{(sr+s_1r_1+\ldots)m}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-(sr+s_1r_1+\ldots)m}\right\}\right]\ \ldots\ (269),\quad \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\ldots\ Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}$$

$$\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,dx=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}}\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\ (1-e^{-2mr})^s\right.$$

$$\left.(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\right]\ \ldots\ (270),\quad \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\ldots\ Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}$$

$$\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Ci.(x)\,\frac{dx}{x}=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}Ei.(-m)\ \ (e^{mr}-e^{-mr})^s\right.$$

$$\left.(e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\ldots\ \left\{(-1)^{s+s_1+\ldots}\ e^{(sr+s_1r_1+\ldots)m}+e^{-(sr+s_1r_1+\ldots)m}\right\}\right]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (271),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\ \frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}}\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\left\{(1-e^{-2mr})^s\,(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots-1\right\}\right]\ldots(272),[42]$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\ \frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,xCi.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}}\ \frac{d^c}{dm^c}\left[m\,Ei.(-m)\ \ (e^{mr}-e^{-mr})^s\ \ (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\ldots\ \left\{(-1)^{s+s_1+\ldots}\right.\right.$$

$$\left.\left.e^{(sr+s_1r_1+\ldots)m}-e^{-(sr+s_1r_1+\ldots)m}\right\}\right]\ \ldots\ (275),\quad \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-\right.$$

$$\left.-(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\ \frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,\frac{dx}{x}=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}\left\{Ei.(-m)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-Ei.(m)\right\}\left\{(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots-1\right\}\right]\ldots(276),\ \int_0^\infty Sin.^s rx.Sin.^{s_1}r_1x\ldots Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-\right.$$

[42] Les intégrales (270) et (272) donnent, lorsqu'on en prend la somme et la différence:

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\ldots\ \frac{Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\ldots)x+(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Si.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}}\ \frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\ \left\{2(1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots-1\right\}\right]\ \ldots\ (273),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\ldots\ \frac{Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\ldots)x-(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Si.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}}\ \frac{d^c}{dm^c}\ \left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\ \ldots\ (274).$$

$$- (sr+s_1 r_1+\ldots)x \Big\} \frac{Sin. \left\{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Ci.(x)\, dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+2}} \frac{d^c}{dm^c} \Big[Ei.(-m)$$

$$(e^{mr}-e^{-mr})^s (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \Big\{ (-1)^{s+s_1+\ldots} e^{(sr+s_1r_1+\ldots)m} - e^{-(sr+s_1r_1+\ldots)m} \Big\} \Big] \ldots (277)$$ [43].

23. Enfin par les formules (n) et (o) du N°. 4 nous trouvons d'une manière tout-à-fait analogue, en ayant égard aux évaluations spéciales dans les deux Numéros précédents, et en y changeant les facteurs $Cos.^s rx$ dans $Cos.^q px$, (pour $2p$ et $2r$ au lieu de p et r):

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Cos. \Big\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1 p_1+\ldots +$$

$$+ sr+s_1r_1+\ldots)x \Big\} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1} m} (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s$$

$$(1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots \ldots (280), \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin. \Big\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$$

$$- (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x \Big\} \frac{x\,dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \Big\{ 1 - (1+e^{-2mp})^q$$

$$(1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots \Big\} \ldots (281), \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.$$

$$Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Cos. \Big\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x \Big\} \frac{Cos. \left\{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c} \Big[(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s$$

$$(1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots \Big] \ldots (282), \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Cos. \Big\{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$$

$$- (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x \Big\} \frac{Sin. \left\{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \frac{dx}{x}. =$$

---

[43] Par voie d'addition et de soustraction on déduit des intégrales (269) et (277):

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \frac{Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x + (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Ci.(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c} \Big[Ei.(-m) (e^{mr}-e^{-mr})^s (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1} \ldots e^{(sr+s_1r_1+\ldots)m} \Big] \ldots (278).$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \frac{Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x - (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Ci.(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c} \Big[Ei.(-m) (e^{mr}-e^{-mr})^s (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1} \ldots e^{-(sr+s_1r_1+\ldots)m} \Big] \ldots (279).$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c} \left[\frac{1}{m}(1+e^{-2mp})^q \; (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots \; (1-e^{-2mr})^s\right.$$

$$\left.(1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots\right] \ldots (283), \int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; Sin. \left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -\right.$$

$$\left. - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots)x\right\} \frac{Cos.\left\{(c+1)\, Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \, x\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^{c+1}}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c} \left[m\left\{(1+e^{-2mp})^q \; (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots \; (1-e^{-2mr})^s\right.\right.$$

$$\left.\left.(1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots -1\right\}\right] \ldots\ldots\ldots (284), \int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$$

$$Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots)x\right\} \frac{Sin.\left\{(c+1)\, Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \, dx =$$

$$= \frac{(-1)^{c+1}}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c} \left[(1+e^{-2mp})^q \; (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots \; (1-e^{-2mr})^s\right.$$

$$\left.(1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots\right] \ldots\ldots\ldots (285), \text{[44]} \int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$$

$$Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots)x\right\} \frac{dx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+3} m^3} (1+2e^{-2mp}\,Cos.2mp+e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q} \, (1+2e^{-2mp_1}\,Cos.2mp_1+e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1} \ldots$$

$$(1-2e^{-2mr}\; Cos.\,2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s} \; (1-2e^{-2mr_1}\; Cos.\,2mr_1 + e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1} \ldots$$

$$\left[Cos.\left\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right) + q_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right) + \ldots - s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right) -\right.\right.$$

$$\left. - s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.\,2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.\,2mr_1}\right) - \ldots\right\} + Sin.\left\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.\,2mp}{e^{2mp}+Cos.\,2mp}\right) +\right.$$

---

[44] Lorsqu'on combine les intégrales (282) et (285) par addition et par soustraction, il viendra:

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \frac{Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x-(c+1)\, Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \, dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots}} \frac{d^c}{dm^c} \left[(1+e^{-2mp})^q \; (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots \; (1-e^{-2mr})^s \; (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots\right] \ldots (286),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \frac{Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x+(c+1)\, Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \, dx =$$

$$= 0 \ldots (287).$$

$$+ q_1\, Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\dots - s\, Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right) -$$

$$- s_1\, Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\dots\Big\}\Big] \dots (288),\ \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x\dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x\dots$$

$$Cos.\Big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\Big\}\ \frac{x^3dx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}m}\ (1+2e^{-2mp}\,Cos.2mp+e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q}\ (1+2e^{-2mp_1}$$

$$Cos.2mp_1+e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1}\dots\ (1-2e^{-2mr}\,Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\ (1-2e^{-2mr_1}\,Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\dots$$

$$\Big[Cos.\Big\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right)+q_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\dots - s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)-$$

$$- s_1\, Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\dots\Big\} - Sin.\Big\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right) +$$

$$+ q_1\, Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\dots - s\, Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right) -$$

$$- s_1\, Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\dots\Big\}\Big] \dots\dots\dots (289),\ \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x\dots$$

$$Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x\dots\ Sin.\Big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\Big\}\ \frac{xdx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}m^2}\ (1+2e^{-2mp}\,Cos.2mp+e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q}\ (1+2e^{-2mp_1}\,Cos.2mp_1+$$

$$+e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1}\dots\ (1-2e^{-2mr}\,Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\ (1-2e^{-2mr_1}\,Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\dots$$

$$Sin.\Big\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right)+q_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\dots - s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)-$$



$$- s_1\, Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\dots\Big\} \dots\dots\dots\dots (290),\ \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x\dots$$

$$Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x\dots\ Sin.\Big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\Big\}\ \frac{x^3dx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}\ \Big[1-(1+2e^{-2mp}\,Cos.2mp+e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q}\ (1+2e^{-2mp_1}\,Cos.2mp_1+$$

$$+e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1}\dots\ (1-2e^{-2mr}\,Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\ (1-2e^{-2mr_1}\,Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\dots$$

$$Cos.\Big\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right)+q_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\dots - s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)-$$

$$- s_1\, Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\dots\Big\}\Big] \dots (291),\ \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x\dots\ Sin.^s rx.$$

$$Sin.^{s_1} r_1 x\dots\ Cos.\Big\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\Big\}.\ Si.(x)\ \frac{xdx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} (1+e^{-2mp})^q \, (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s$$

$$(1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots \;\ldots\; (292), \int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi - \right.$$

$$\left. - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x \right\}. \; Ci.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2} m} Ei.(-m)$$

$$(e^{mp}+e^{-mp})^q \, (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1} \ldots (e^{mr}-e^{-mr})^s \, (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \left\{ (-1)^{s+s_1+\ldots} \right.$$

$$\left. e^{(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} + e^{-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} \right\} \ldots (293), \int_0^\infty Cos.^q px. Cos.^{q_1} p_1 x \ldots$$

$$Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; Sin. \left\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x \right\}. \; Si.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2} m} \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} \left[(1+e^{-2mp})^q \, (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s \right.$$

$$\left. (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots - 1 \right] \ldots (294), \int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; Sin. \left\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi - \right.$$

$$\left. - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x \right\}. \; Ci.(x) \frac{x dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} Ei.(-m) (e^{mp}+e^{-mp})^q$$

$$(e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1} \ldots (e^{mr}-e^{-mr})^s \, (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \left\{ (-1)^{s+s_1+\ldots} \, e^{(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} - \right.$$

$$\left. - e^{-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} \right\} \ldots (295), \int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$$

$$Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x \right\} \frac{Cos. \left\{ (c+1) \, Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} x Si.(x) \, dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \frac{d^c}{dm^c} \left[m \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} (1+e^{-2mp})^q \, (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots \right.$$

$$\left. (1-e^{-2mr})^s \, (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots \right] \ldots (296), \int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$$

$$Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x \right\} \frac{Cos. \left\{ (c+1) \, Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Ci.(x) \, dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \frac{d^c}{dm^c} \left[Ei.(-m) \, (e^{mp}+e^{-mp})^q \, (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1} \ldots (e^{mr}-e^{-mr})^s \right.$$

$$\left. (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \left\{ (-1)^{s+s_1+\ldots} e^{(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} + e^{-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} \right\} \right] (297),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; Cos. \left\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x \right\}$$

$$\frac{Sin. \left\{ (c+1) \, Arctg. \frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Si.(x) \, dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \frac{d^c}{dm^c} \left[\left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} \right.$$

$$(1+e^{-2mp})^q\,(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots\,(1-e^{-2mr})^s\,(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots]\ \dots\ (298),\quad \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x\dots$$

$$Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x\dots\ Cos.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\right\}$$

$$\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Ci.(x)\,\frac{dx}{x}=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}Ei.(-m)\,(e^{mp}+e^{-mp})^q\right.$$

$$(e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1}\dots\,(e^{mr}-e^{-mr})^s\,(e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\dots\left\{(-1)^{s+s_1+\dots}e^{(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m}+\right.$$

$$\left.\left.+\,e^{-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m}\right\}\right]\ \dots\ (299),\quad \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots$$

$$Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\right\}\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\ \left\{(1+e^{-2mp})^q\,(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots\right.\right.$$

$$\left.\left.(1-e^{-2mr})^s\,(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots-1\right\}\right]\ \dots\ (300),$$ [45] $$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots$$

$$Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\right\}\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,xCi.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[mEi.(-m)\,(e^{mp}+e^{-mp})^q\,(e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1}\dots\,(e^{mr}-e^{-mr})^s\right.$$

$$\left.(e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\dots\left\{(-1)^{s+s_1+\dots}e^{(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m}-e^{-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m}\right\}\right]\ (303)$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots\ Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\right\}$$

$$\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,\frac{dx}{x}=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\right.$$

$$\left.\left\{(1+e^{-2mp})^q\,(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s\,(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots-1\right\}\right]\ \dots\ (304),\quad \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots$$

---

[45] La somme et la différence des intégrales (298) et (300) nous donnent:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots\ \frac{Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\frac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x+(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\left\{2(1+e^{-2mp})^q(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots-1\right\}\right]\ (301)$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots\ \frac{Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\frac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x-(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Si.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[Ei.(m)-Ei.(-m)]\ \dots\ (302).$$

$$Sin.^s rx.\ \ Sin.^{s_1} r_1 x \dots\ \ Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x\right\}$$

$$\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Ci.(x)\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}}\ \frac{d^c}{dm^c}\Big[Ei.(-m)\ (e^{mp}+e^{-mp})^q$$

$$(e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1}\dots\ (e^{mr}-e^{-mr})^s\ (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\dots\ \left\{(-1)^{s+s_1+\dots}\, e^{(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m} -\right.$$

$$\left. - e^{-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m}\right\}\Big]\ \dots\ (305)\ [46].$$

24. Avant d'aller plus loin, nous pourrons différentier quelques-unes des intégrales trouvées dans ces derniers numéros par rapport à la constante s (ou q), et faire évanouir cet s (ou q) après l'opération. Les formules générales (λ) et (μ) du N°. 6 nous ont déjà appris, que cette méthode n'est applicable que là, où il se trouve dans la fonction à différentier comme facteur un *Cosinus* d'un multiple quelconque de rx, $Cos. srx$; et qu'on ne peut pas en faire usage, lorsque un tel *Cosinus* se trouve remplacé par un *Sinus* analogue. Quant à la différentiation des valeurs de nos intégrales, telles qu'elles se trouvent dans les numéros cités, observons qu'il faut mettre par exemple $\left(\frac{1+e^{-2mr}}{2}\right)^s$ au lieu de $\frac{1}{2^s}(1+e^{-2mr})^s$, et qu'il résulte alors de l'opération indiquée $l\frac{1+e^{-2mr}}{2}$. Une transformation analogue est nécessaire dans des cas semblables.

Ainsi, en nous occupant en premier lieu des résultats obtenus au Numéro 21, nous aurons par les intégrales (194), (198), (199): $\int_0^\infty l\, Cos.\, rx\ \frac{dx}{m^2+x^2} =$

---

[46] Les intégrales (297) et (305) fournissent, lorsqu'on les combine par voie d'addition et de soustraction:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \dots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \dots \frac{Cos.\left\{(s+s_1+\dots)\frac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x+(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Ci.(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}\ \frac{d^c}{dm^c}\Big[Ei.(-m)\ \ (e^{mp}+e^{-mp})^q\ \ (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1}\dots\ \ (e^{mr}-e^{-mr})^s\ \ (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\dots$$

$$e^{-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m}\Big]\ \dots\ (306),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \dots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \dots \frac{Cos.\left\{(s+s_1+\dots)\frac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x-(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Ci.(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}\ \frac{d^c}{dm^c}\Big[Ei.(-m)\ \ (e^{mp}+e^{-mp})^q\ \ (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1}\dots\ \ (e^{mr}-e^{-mr})^s\ \ (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\dots$$

$$(-1)^{s+s_1+\dots}\, e^{(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m}\Big]\ \dots\ (307).$$

$= \frac{\pi}{2m} \, l \frac{1+e^{-2mr}}{2}$ (Table 415, N°. 5), $\int_0^\infty l\, Cos.\, rx \, \frac{Cos. \left\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \, dx =$

$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \, \frac{\pi}{2} \, \frac{d^c}{dm^c} \, l \frac{1+e^{-2mr}}{2}$ ...... (308), $\int_0^\infty l\, Cos.\, rx \, \frac{Sin. \left\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \, \frac{dx}{x} =$

$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \, \frac{\pi}{2} \, \frac{d^c}{dm^c} \left[\frac{1}{m} l \frac{1+e^{-2mr}}{2}\right]$ ... (309).

Pour les intégrales (210) et (211) il faut remarquer, que dans leurs valeurs on rencontre les deux facteurs $R^{\frac{1}{2}s} \, Cos.\, s\Phi$ et $R^{\frac{1}{2}s} \, Sin.\, s\Phi$. Leur différentiation par rapport à s donne, lorsque ensuite on fait évanouir cet s: $R^{\frac{1}{2}s} \, \frac{1}{2} \, l R.\, Cos.\, s\Phi - R^{\frac{1}{2}s} \Phi \, Sin.\, s\Phi =$ $= \frac{1}{2} \, l R$ et $R^{\frac{1}{2}s} \, \frac{1}{2} \, l R.\, Sin.\, s\Phi + R^{\frac{1}{2}s} \Phi \, Cos.\, s\Phi = \Phi$. Par conséquent on trouve:

$\int_0^\infty l\, Cos.\, rx \, \frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m^3} \left\{ \frac{1}{2} \, l \frac{1+2e^{-2mr} Cos.\, 2mr + e^{-4mr}}{2} + Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} + Cos.\, 2mr} \right) \right\}$ (310),

$\int_0^\infty l\, Cos.\, rx \, \frac{x^2 dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m} \left\{ \frac{1}{2} \, l \frac{1+2e^{-2mr} Cos.\, 2mr + e^{-4mr}}{2} - Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} + Cos.\, 2mr} \right) \right\}$ (311).



Quant aux valeurs des intégrales (218), (219) et (226) à (229), — lorsque dans celles-ci on prend $s_1 = s_2 = ...$, tous zéro — il faut quelquefois y remplacer un produit de facteurs $(e^{mr}+e^{-mr})^s \, (e^{smr}+e^{-smr})$ par la somme identiquement égale $(1+e^{2mr})^s + (1+e^{-2mr})^s$, puis y ajouter le dénominateur général $\frac{1}{2^s}$. Dès-lors l'opération indiquée aura pour résultat ici: $l \frac{1+e^{2mr}}{2} + l \frac{1+e^{-2mr}}{2} = l \frac{1+e^{2mr}+e^{-2mr}+1}{4} =$ $= 2\, l \frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}$. Pour les intégrales analogues à facteur $Sin.\, srx$, on aurait dans leur valeur $l \frac{1+e^{2mr}}{1+e^{-2mr}} = l e^{2mr} = 2mr$, il est vrai, mais nous avons vu plus haut, que le facteur analogue à mx, qui se trouverait dans ce cas sous le signe d'intégration par rapport à x, rendrait l'intégrale elle-même discontinue. A l'aide des transformations précédentes, on obtient maintenant:

$\int_0^\infty l\, Cos.\, rx.\, Si.(x) \, \frac{x dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4} \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} \, l \frac{1+e^{-2mr}}{2}$ ... (312), $\int_0^\infty l\, Cos.\, rx.$ $Ci.(x) \, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} \, Ei.(-m) \, l \frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}$ .... (313), $\int_0^\infty l\, Cos.\, rx.$ $Si.(x) \, \frac{Cos. \left\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \, x dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \, \frac{\pi}{4} \, \frac{d^c}{dm^c} \left[m \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} \, l \frac{1+e^{-2mr}}{2} \right]$ ... (314),

$$\int_0^\infty l\,Cos.rx.\ Ci.(x)\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}\left[Ei.(-m)\ l\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right]\ ...\ (315),$$

$$\int_0^\infty l\,Cos.rx.\ Si.(x)\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\frac{\pi}{4}\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}l\frac{1+e^{-2mr}}{2}\right]\ (316),$$

$$\int_0^\infty l\,Cos.rx.\ Ci.(x)\frac{Sin.\left\{(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\frac{dx}{x}=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}Ei.(-m)\ l\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right]\ ...\ (317).$$

25. Passons aux intégrales déduites au Numéro 22. Leur différentiation par rapport à s donnera, après avoir annulé cette constante, des formules correspondantes à celles que nous venons de trouver au Numéro précédent. Ainsi nous aurons par les intégrales (238), (242), (243):

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx.\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\ l\frac{1-e^{-2mr}}{2}\quad \text{(Table 415, N}^\circ\text{. 4) [47]},$$

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx.\ \frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}\ l\frac{1-e^{-2mr}}{2}\ ......\ (318),\ [48]$$

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx.\ \frac{Sin.\left\{(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\frac{dx}{x}=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}\ l\frac{1-e^{-2mr}}{2}\right]\ ...\ (320)\ [49].$$

Quant aux intégrales (252) et (253) à dénominateur $4m^4+x^4$, ici valent les mêmes réductions, qui ont mené aux intégrales (310) et (311), excepté qu'il nous faut faire maintenant $R_1{}^2=1-2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr}$ et $\phi_1=\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}$; lorsqu'on fait attention à cette différence, il vient:

---

[47] La différence entre cette intégrale et celle de Table 415, N°. 5, que nous avons évaluée au N°. 24, donne encore $\int_0^\infty l\,Tang.rx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\ l\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}$ (Table 415, N°. 11).

[48] Prenons la différence de celle-ci et de l'intégrale correspondante (308):

$$\int_0^\infty l\,Tang.rx\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}\ l\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}}\ ...\ (319).$$

[49] En soustrayant de cette intégrale la formule (309), nous obtiendrons:

$$\int_0^\infty l\,Tang.rx\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\frac{dx}{x}=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}\ l\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}}\right]\ ...\ (321).$$

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx\,\frac{dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{8m^3}\left\{\frac{1}{2}\,l\,\frac{1-2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr}}{2}-Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)\right\}\ (322),\ [50]$$

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx\,\frac{x^2dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{4m}\left\{\frac{1}{2}\,l\,\frac{1-2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr}}{2}+Arctg\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)\right\}\ (324)\ [51].$$

Les intégrales (260) et (261) et les suivantes (268) à (271) admettent ici encore les mêmes transformations, mutatis mutandis, que les intégrales correspondantes du Numéro 21, comme on l'a indiqué au N°. précédent; et nous obtiendrons:

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx.\ Si.(x)\,\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4}\,\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\ l\,\frac{1-e^{-2mr}}{2}\ \ldots\ldots\ (326),\ [52]$$

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx.\ Ci.(x)\,\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\,Ei.(-m)\ l\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2}\ \ldots\ (328),\ [53]$$

$$\int_0^\infty l\,Sin\,rx.\ Si.(x)\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac12(c+1)}}\,xdx=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[m\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\ l\,\frac{1-e^{-2mr}}{2}\right]\ \ldots\ (330),$$

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx.\ Ci.(x)\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac12(c+1)}}\,dx=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[Ei.(-m)\ l\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2}\right]\ \ldots\ (331),$$

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx.\ Si.(x)\,\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac12(c+1)}}\,dx=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\ l\,\frac{1-e^{-2mr}}{2}\right]\ (322),$$

$$\int_0^\infty l\,Sin.rx.\ Ci.(x)\,\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac12(c+1)}}\,\frac{dx}{x}=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}Ei.(-m)\ l\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2}\right]\ (333)\ [54].$$

---

[50] Par voie de soustraction cette intégrale et l'intégrale (310) donnent:

$$\int_0^\infty l\,Tang.rx\,\frac{dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{8m^3}\left[\frac{1}{2}\,l\,\frac{e^{2mr}-2\,Cos.2mr+e^{-2mr}}{e^{2mr}+2\,Cos.2mr+e^{-2mr}}+Arctg.\left(\frac{2Sin.2mr}{e^{2mr}-e^{-2mr}}\right)\right]\ \ldots\ (323).$$

[51] La différence de celle-ci et de l'intégrale correspondante (311) fournit encore:

$$\int_0^\infty l\,Tang.rx\,\frac{x^2dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{4m}\left[\frac{1}{2}\,l\,\frac{e^{2mr}-2\,Cos.2mr+e^{-2mr}}{e^{2mr}+2\,Cos.2mr+e^{-2mr}}-Arctg.\left(\frac{2Sin.2mr}{e^{2mr}-e^{-2mr}}\right)\right]\ \ldots\ (325).$$

[52] En soustrayant de cette intégrale la formule (312) nous aurons:

$$\int_0^\infty l\,Tang.rx.\ Si.(x)\,\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4}\,\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\ l\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}}\ \ldots\ (327).$$

[53] Prenons la différence entre celle-ci et l'intégrale (313), alors il vient:

$$\int_0^\infty l\,Tang.rx.\ Ci.(x)\,\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\,Ei.(-m)\ l\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}}\ \ldots\ (329).$$

[54] On déduit de ces quatre intégrales et des intégrales correspondantes (314) à (317) par voie de soustraction respectivement:

Or, l'application de notre méthode n'admettant qu'un seul facteur $Cos.^s rx$ ou $Sin.^s rx$, il est clair que les formules du N°. 23 ne peuvent rien nous apprendre: car elles se réduiraient toujours soit aux intégrales du N°. 21, soit à celles du N°. 22, avant que nous pussions les différentier avec quelque succès.

26. Retournons à présent à l'application immédiate des théorèmes (XVI) à (LIII), et employons-y les développements du N°. 7; c'est-à-dire seulement les équations (p), (q), (t) et (u), puisque ces dernières comprennent les développements (r) et (s) comme cas particuliers: dès-lors il nous faut aussi nécessairement passer en silence les théorèmes (XVIII) et (XIX). Pour cette application nous aurons ici: $f(\alpha)=e^{s}$, $f(\alpha+\beta e^{\pm mr})=e^{se^{\pm mr}}$, $f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr})=e^{se^{-(1-i)mr}}=e^{se^{-mr}(Cos.mr+iSin.mr)}=$ $=e^{se^{-mr}Cos.mr}\{Cos.(se^{-mr}Sin.mr)+iSin.(se^{-mr}Sin.mr)\}$, et en changeant le signe de i

—

$$\int_0^\infty l\, Tang.rx.\; Si.(x)\; \frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; xdx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[m\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}$$

$$l\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}}]\;\ldots\;(334),\;\int_0^\infty l\, Tang.rx.\; Ci.(x)\; \frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[Ei.(-m)$$

$$l\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}}]\;\ldots\;(335),\;\int_0^\infty l\, Tang.rx.\; Si.(x)\,\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\frac{\pi}{4}\frac{d^c}{dm^c}[\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}$$

$$l\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}}]\;\ldots\;(336),\;\int_0^\infty l\, Tang.rx.\; Ci.(x)\; \frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; \frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,[\frac{1}{m}Ei.(-m)$$

$$l\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}}]\;\ldots\;(337).$$

Lorsque dans les Notes [47] à [54] on avait pris la somme des deux intégrales correspondantes, au lieu d'en prendre chaque fois la différence, on aurait obtenu une intégrale, dont la forme s'exprimerait généralement par $\int_0^\infty l\,(Sin.sr.\;Cos.rx).\;f(x)\,dx$. . . . . $(\alpha\mu)$

En y ajoutant respectivement l'intégrale $\int_0^\infty l\,2.\;f(x)\,dx = l\,2\int_0^\infty f(x)\,dx$, ... $(\alpha\theta)$

intégrale, qui ici se trouve toujours être connue, on acquiert l'intégrale $\int_0^\infty l\,Sin.2rx.\;f(x)\,dx$. Donc celle-ci doit coïncider, pour $2r$ au lieu de r, avec l'intégrale correspondante $\int_0^\infty l\,Sin.rx.\;f(x)\,dx$, trouvée au dernier numéro. Comme cela en effet nous arrive toujours, on peut tirer de ceci une vérification de nos formules, et de notre méthode.

$f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr}) = e^{se^{-mr} Cos.mr} \{ Cos.(se^{-mr} Sin.mr) - iSin.(se^{-mr} Sin.mr) \}$. Eu égard à ces valeurs particulières dans les évaluations, nous trouverons:

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx}\, Cos.(s Sin.rx) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} e^{se^{-mr}}$ (Table 395, N°. 2), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx}$ $Sin.(s Sin.rx) \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}(e^{se^{-mr}} - 1)$ (Table 395, N°. 1), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \ldots}$ $Cos.(s Sin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \ldots) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots}$ .... (338),

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \ldots} Sin.(s Sin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \ldots) \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}(e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots} - 1)$ ... (339),

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Cos.(s Sin.rx) \frac{Cos.\left\{(c+1) Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2} \frac{d^c}{dm^c} [e^{se^{-mr}}]$ ...... (340),

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Cos.(s Sin.rx) \frac{Sin.\left\{(c+1) Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2} \frac{d^c}{dm^c} [\frac{1}{m} e^{se^{-mr}}]$ ... (341),

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Sin.(s Sin.rx) \frac{Cos.\left\{(c+1) Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} xdx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2} \frac{d^c}{dm^c} [me^{se^{-mr}}]$ ... (342),

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx} Sin.(s Sin.rx) \frac{Sin.\left\{(c+1) Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2} \frac{d^c}{dm^c} [e^{se^{-mr}}]$ ... (343), [55]

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \ldots} Cos.(s Sin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \ldots) \frac{Cos.\left\{(c+1) Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} dx =$
$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2} \frac{d^c}{dm^c} [e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots}]$ ... (346), $\int_0^\infty e^{s Cos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \ldots} Cos.\{ s Sin.rx +$
$+ s_1 Sin.r_1 x + \ldots \} \frac{Sin.\left\{(c+1) Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2} \frac{d^c}{dm^c} [\frac{1}{m} e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots}]$ ... (347),

---

[55] Par voie d'addition et de soustraction on déduit des intégrales (340) et (343):

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx} \frac{Cos.\left\{ s Sin.rx + (c+1) Arctg.\frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} dx = 0$ ... (344),

$\int_0^\infty e^{s Cos.rx} \frac{Cos.\left\{ s Sin.rx - (c+1) Arctg.\frac{x}{m} \right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \pi \frac{d^c}{dm^c} [e^{se^{-mr}}]$ ... (345).

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1Cos.r_1x+\dots}\ Sin.\left\{s\,Sin.rx+s_1Sin.r_1x+\dots\right\}\ \frac{Cos.\left\{(c+1)\ Arctg.\ \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ x\,dx\ =$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2}\ \frac{d^c}{dm^c}\left[m\,e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots}\right]\ \dots\ (348),\quad \int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1Cos.r_1x+\dots}\ Sin.\left\{s\,Sin.rx+\right.$$

$$\left.+s_1Sin.r_1x+\dots\right\}\ \frac{Sin.\left\{(c+1)\ Arctg.\ \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ dx=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\ \frac{\pi}{2}\ \frac{d^c}{dm^c}\left[e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots}\right]\dots(349),\ [56]$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx}\ Cos.\,(s\,Sin.\,rx)\ \frac{dx}{4m^4+x^4}\ =\ \frac{\pi}{8m^3}\ e^{se^{-mr}\ Cos.\,mr}\ \left\{Cos.\,(se^{-mr}\ Sin.\,mr)\ +\right.$$

$$\left.+\ Sin.(se^{-mr}\ Sin.\,mr)\right\}\ \dots\ (352),\quad \int_0^\infty e^{s\,Cos.rx}\ Cos.(s\,Sin.\,rx)\ \frac{x^2dx}{4m^4+x^4}\ =\ \frac{\pi}{4m}\ e^{se^{-mr}\ Cos.\,mr}$$

$$\left\{Cos.\,(se^{mr}\ Sin.\,mr)-Sin.\,(se^{-mr}\ Sin.\,mr)\right\}\ \dots\ (353),\quad \int_0^\infty e^{s\,Cos.rx}\ Sin.\,(s\,Sin.\,rx)\ \frac{x\,dx}{4m^4+x^4}=$$

$$=\frac{\pi}{4m^2}\ e^{se^{-mr}\ Cos.\,mr}\ Sin.\,(se^{-mr}\ Sin.\,mr)\ \dots\ (354),\quad \int_0^\infty e^{s\,Cos.rx}\ Sin.\,(s\,Sin.\,rx)\ \frac{x^3dx}{4m^4+x^4}\ =$$

$$=\frac{\pi}{2}\,e^{se^{-mr}\ Cos.\,mr}\left\{Cos.(se^{-mr}\ Cos.\,mr)-e^s\right\}\ \dots\ (355),\quad \int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1Cos.r_1x+\dots}\ Cos.(s\,Sin.rx+$$

$$+\ s_1Sin.r_1x+\dots)\ \frac{dx}{4m^4+x^4}\ =\ \frac{\pi}{8m^3}\ e^{se^{-mr}\ Cos.mr+s_1e^{-mr_1}\ Cos.mr_1+\dots}\ \left\{Cos.\,(se^{-mr}\ Sin.\,mr\ +\right.$$

$$+\ s_1e^{-mr_1}\ \ Sin.\,mr_1+\dots)\ +\ Sin.\,(se^{-mr}\ \ Sin.\,mr\ +\ s_1e^{-mr_1}\ \ Sin.\,mr_1+\dots)\Big\}\ \dots\dots\dots\ (356),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1Cos.r_1x+\dots}Cos.(s\,Sin.rx+s_1Sin.r_1x+\dots)\ \frac{x^2dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{4m}e^{se^{-mr}Cos.mr+s_1e^{-mr_1}Cos.mr_1+\dots}$$

$$\left\{Cos.(se^{-mr}\ Sin.mr+s_1e^{-mr_1}\ Sin.mr_1+\dots)-Sin.(se^{-mr}\ Sin.mr+s_1e^{-mr_1}\ Sin.mr_1+\dots)\right\}\ \dots\ (357),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1Cos.r_1x+\dots}Sin.(s\,Sin.rx+s_1Sin.r_1x+\dots)\frac{x\,dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{4m^2}e^{se^{-mr}Cos.mr+s_1e^{-mr_1}Cos.mr_1+\dots}$$

$$Sin.(se^{-mr}\ Sin.\,mr+s_1e^{-mr_1}\ Sin.\,mr_1+\dots)\ \dots\ (358),\quad \int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1Cos.r_1x+\dots}\ Sin.(s\,Sin.\,rx+$$

---

[56] La somme et la différence des intégrales (346) et (349) nous donneront:

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1Cos.r_1x+\dots}\ \frac{Cos.\left\{s\,Sin.\,rx+s_1Sin.r_1x+\dots+(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ dx=0\ \dots\ (350),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1Cos.r_1x+\dots}\ \frac{Cos.\left\{s\,Sin.\,rx+s_1Sin.r_1x+\dots-(c+1)\ Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ dx\ =$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\ \pi\ \frac{d^c}{dm^c}\left[e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots}\right]\ \dots\ (351).$$

$$+ s_1 \mathit{Sin.} r_1 x + \ldots) \frac{x^3 dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2} e^{se^{-mr} \mathit{Cos.} mr + s_1 e^{-mr_1} \mathit{Cos.} mr_1 + \ldots} \{ \mathit{Cos.} (se^{-mr} \mathit{Sin.} mr +$$

$$+ s_1 e^{-mr_1} \mathit{Sin.} mr_1 + \ldots) - e^{s + s_1 + \ldots} \} \ldots (359), \int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx} \mathit{Cos.} (s \mathit{Sin.} rx). \mathit{Si.}(x) \frac{x dx}{m^2 + x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \{ \mathit{Ei.}(-m) - \mathit{Ei.}(m) \} e^{se^{-mr}} \ldots (360), \int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx} \mathit{Cos.} (s \mathit{Sin.} rx). \mathit{Ci.}(x) \frac{dx}{m^2 + x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4m} \mathit{Ei.}(-m) (e^{se^{-mr}} + e^{se^{mr}}) \ldots (361), \int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx} \mathit{Sin.} (s \mathit{Sin.} rx). \mathit{Si.}(x) \frac{dx}{m^2 + x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4m} \{ \mathit{Ei.}(m) - \mathit{Ei.}(-m) \} \{ e^{se^{-mr}} - e^s \} \ldots (362), \int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx} \mathit{Sin.} (s \mathit{Sin.} rx). \mathit{Ci.}(x) \frac{x dx}{m^2 + x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \mathit{Ei.}(-m) (e^{se^{-mr}} - e^{se^{mr}}) \ldots (363), \int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx + s_1 \mathit{Cos.} r_1 x + \ldots} \mathit{Cos.} (s \mathit{Sin.} rx +$$

$$+ s_1 \mathit{Sin.} r_1 x + \ldots). \mathit{Si.}(x) \frac{x dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} \{ \mathit{Ei.}(-m) - \mathit{Ei.}(m) \} e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots} \ldots (364),$$

$$\int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx + s_1 \mathit{Cos.} r_1 x + \ldots} \mathit{Cos.} (s \mathit{Sin.} rx + s_1 \mathit{Sin.} r_1 x + \ldots). \mathit{Ci.}(x) \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4m} \mathit{Ei.}(-m)$$

$$(e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots} + e^{se^{mr} + s_1 e^{mr_1} + \ldots}) \ldots (365), \int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx + s_1 \mathit{Cos.} r_1 x + \ldots} \mathit{Sin.} (s \mathit{Sin.} rx +$$

$$+ s_1 \mathit{Sin.} r_1 x + \ldots). \mathit{Si.}(x) \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4m} \{ \mathit{Ei.}(m) - \mathit{Ei.}(-m) \} \{ e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots} - e^{s + s_1 + \ldots} \} (366),$$

$$\int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx + s_1 \mathit{Cos.} r_1 x + \ldots} \mathit{Sin.} (s \mathit{Sin.} rx + s_1 \mathit{Sin.} r_1 x + \ldots). \mathit{Ci.}(x) \frac{x dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} \mathit{Ei.}(-m)$$

$$\{ e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots} - e^{se^{mr} + s_1 e^{mr_1} + \ldots} \} \ldots (367), \int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx + s_1 \mathit{Cos.} r_1 x + \ldots} \mathit{Cos.} (s \mathit{Sin.} rx +$$



$$+ s_1 \mathit{Sin.} r_1 x + \ldots) \frac{\mathit{Cos.} \left\{ (c+1) \mathit{Arctg.} \frac{x}{m} \right\}}{(m^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} x \mathit{Si.}(x) dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{4} \frac{d^c}{dm^c} [m \{ \mathit{Ei.}(-m) - \mathit{Ei.}(m) \}$$

$$e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots}] \ldots (368), \int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx + s_1 \mathit{Cos.} r_1 x + \ldots} \mathit{Cos.} (s \mathit{Sin.} rx + s_1 \mathit{Sin.} r_1 x + \ldots)$$

$$\frac{\mathit{Cos.} \left\{ (c+1) \mathit{Arctg.} \frac{x}{m} \right\}}{(m^2 + x^4)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \mathit{Ci.}(x) dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{4} \frac{d^c}{dm^c} [\mathit{Ei.}(-m) \{ e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots} +$$

$$+ e^{se^{mr} + s_1 e^{mr_1} + \ldots} \}] \ldots (369), \int_0^{\infty} e^{s \mathit{Cos.} rx + s_1 \mathit{Cos.} r_1 x + \ldots} \mathit{Cos.} (s \mathit{Sin.} rx + s_1 \mathit{Sin.} r_1 x + \ldots)$$

$$\frac{\mathit{Sin.} \left\{ (c+1) \mathit{Arctg.} \frac{x}{m} \right\}}{(m^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \mathit{Si.}(x) dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{4} \frac{d^c}{dm^c} [\{ \mathit{Ei.}(-m) - \mathit{Ei.}(m) \} e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots}] \ldots (370),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\dots}\;Cos.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\dots)\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\;Ci.(x)\,\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}Ei.(-m)\;\left\{e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots}+e^{se^{mr}+s_1e^{mr_1}+\dots}\right\}\right]\;\dots\dots\;(371),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\dots}\;Sin.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\dots)\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\;Si.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(m)-Ei.(-m)\right\}\;\left\{e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots}-e^{s+s_1+\dots}\right\}\right]\;\dots\;(372),\;[57]$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\dots}\;Sin.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\dots)\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\;x\,Ci.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[m\,Ei.(-m)\;\left\{e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots}-e^{se^{mr}+s_1e^{mr_1}+\dots}\right\}\right]\;\dots\dots\dots\;(375),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\dots}\;Sin.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\dots)\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\;Si.(x)\,\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}\left\{Ei.(m)-Ei.(-m)\right\}\;\left\{e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots}-e^{s+s_1+\dots}\right\}\right]\;\dots\dots\;(376),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\dots}\;Sin.\left\{s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\dots\right\}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\;Ci.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[Ei.(-m)\;\left\{e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots}-e^{se^{mr}+s_1e^{mr_1}+\dots}\right\}\right]\;\dots\;(377)\;[58].$$

---

[57] Lorsqu'on prend la somme et la différence des intégrales (370) et (372) il vient:

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\dots}\;\frac{Sin.\left\{s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\dots+(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\;Si.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\;\left\{e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots}-e^{s+s_1+\dots}\right\}\right]\;\dots\;(373).$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\dots}\;\frac{Sin.\left\{s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\dots-(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\;Si.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^{c+1}}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\;e^{s+s_1+\dots}\right]\;\dots\;(374).$$

[58] Les intégrales (369) et (377) donnent par voie d'addition et de soustraction:

27. Les intégrales, qu'on vient de déduire, se prêtent aisément à la différentiation par rapport à la constante s, moyennant les formules de réduction, trouvées au N°. 9 (ν), (ξ), (ο), (π). De telle sorte on trouvera:

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx}\ \text{Cos.}(s\,\text{Sin.}\,rx+rx)\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\ e^{se^{-mr}-mr}\ \ldots\ldots\ldots (380),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx}\ \text{Sin.}(s\,\text{Sin.}\,rx+rx)\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2}\ e^{se^{-mr}-mr}\ \ldots\ldots\ldots (381),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx+s_1\text{Cos.}\,r_1x+\ldots}\ \text{Cos.}(s\,\text{Sin.}\,rx+s_1\text{Sin.}\,r_1x+\ldots+r_ax)\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\ e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a}\ \ldots\ldots (382),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx+s_1\text{Cos.}\,r_1x+\ldots}\ \text{Sin.}(s\,\text{Sin.}\,rx+s_1\text{Sin.}\,r_1x+\ldots+r_ax)\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a}\ \ldots (383),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx+s_1\text{Cos.}\,r_1x+\ldots}\ \text{Cos.}(s\,\text{Sin.}\,rx+s_1\text{Sin.}\,r_1x+\ldots+r_ax)\ \frac{\text{Cos.}\left\{(c+1)\,\text{Arctg.}\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ dx=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2}\ \frac{d^c}{dm^c}\ [e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a}]\ \ldots\ldots\ldots (384),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx+s_1\text{Cos.}\,r_1x+\ldots}\ \text{Cos.}(s\,\text{Sin.}\,rx+s_1\text{Sin.}\,r_1x+\ldots+r_ax)\ \frac{\text{Sin.}\left\{(c+1)\,\text{Arctg.}\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ \frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a}\right]\ \ldots (385),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx+s_1\text{Cos.}\,r_1x+\ldots}\ \text{Sin.}(s\,\text{Sin.}\,rx+s_1\text{Sin.}\,r_1x+\ldots+r_ax)\ \frac{\text{Cos.}\left\{(c+1)\,\text{Arctg.}\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ xdx=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}[me^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a}] (386),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx+s_1\text{Cos.}\,r_1x+\ldots}\ \text{Sin.}(s\,\text{Sin.}\,rx+s_1\text{Sin.}\,r_1x+\ldots+r_ax)\ \frac{\text{Sin.}\left\{(c+1)\,\text{Arctg.}\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2}\ \frac{d^c}{dm^c}\ [e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a}]\ \ldots (387).$$

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx+s_1\text{Cos.}\,r_1x+\ldots}\ \frac{\text{Cos.}\left\{s\,\text{Sin.}\,rx+s_1\text{Sin.}\,r_1x+\ldots+(c+1)\,\text{Arctg.}\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Ci.(x)\ dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2}\ \frac{d^c}{dm^c}\ [Ei.(-m)\ e^{se^{mr}+s_1e^{mr_1}+\ldots}]\ \ldots (378),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,\text{Cos.}\,rx+s_1\text{Cos.}\,r_1x+\ldots}\ \frac{\text{Cos.}\left\{s\,\text{Sin.}\,rx+s_1\text{Sin.}\,r_1x+\ldots-(c+1)\,\text{Arctg.}\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ Ci.(x)\ dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{2}\ \frac{d^c}{dm^c}\ [Ei.(-m)\ e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots}]\ \ldots (379).$$

Or, tout comme précédemment, et comme encore dans la suite, il n'est pas nécessaire ici que la constante r_a se trouve parmi les autres r dans l'exponentielle. Ensuite, parce que $\frac{d}{ds} \cdot e^{se^{-mr} Cos.mr} Cos.(se^{-mr} Sin.mr) = e^{se^{-mr} Cos.mr - mr} Cos.(se^{-mr} Sin.mr + mr)$ et $\frac{d}{ds} \cdot e^{se^{-mr} Cos.mr} Sin.(se^{-mr} Sin.mr) = e^{se^{-mr} Cos.mr - mr} Sin.(se^{-mr} Sin.mr + mr)$, on déduit des intégrales (356) à (359):

$\int_0^\infty e^{sCos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \dots} Cos.(sSin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \dots + r_a x) \frac{dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{8m^3} e^{se^{-mr} Cos.mr + s_1 e^{-mr_1} Cos.mr_1 + \dots - mr_a} \{ Cos.(se^{-mr} Sin.mr + s_1 e^{-mr_1} Sin.mr_1 + \dots + mr_a) + Sin(se^{-mr} Sin.mr + s_1 e^{-mr_1} Sin.mr_1 + \dots + mr_a) \}$ ...... (388), $\int_0^\infty e^{sCos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \dots} Cos.(sSin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \dots + r_a x) \frac{x^2 dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m} e^{se^{-mr} Cos.mr + s_1 e^{-mr_1} Cos.mr_1 + \dots - mr_a} \{ Cos.(se^{-mr} Sin.mr + s_1 e^{-mr_1} Sin.mr_1 + \dots + mr_a) - Sin.(se^{-mr} Sin.mr + s_1 e^{-mr_1} Sin.mr_1 + \dots + mr_a) \}$ ... (389),

$\int_0^\infty e^{sCos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \dots} Sin.(sSin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \dots + r_a x) \frac{xdx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m^2} e^{se^{-mr} Cos.mr + s_1 e^{-mr_1} Cos.mr_1 + \dots - mr_a} Sin.(se^{-mr} Sin.mr + s_1 e^{-mr_1} Sin.mr_1 + \dots + mr_a)$ (390),

$\int_0^\infty e^{sCos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \dots} Sin.(sSin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \dots + r_a x) \frac{x^3 dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2} e^{se^{-mr} Cos.mr + s_1 e^{-mr_1} Cos.mr_1 + \dots - mr_a} \{ Cos.(se^{-mr} Sin.mr + s_1 e^{-mr_1} Sin.mr_1 + \dots + mr_a) - e^{s + s_1 + \dots} \}$ ... (391).

Enfin notre procédé appliqué aux intégrales (364) à (379) fournit:

$\int_0^\infty e^{sCos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \dots} Cos.(sSin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \dots + r_a x). Si.(x) \frac{xdx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} \{ Ei.(-m) - Ei.(m) \} e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \dots - mr_a}$ ... (392), $\int_0^\infty e^{sCos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \dots} Cos.(sSin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \dots + r_a x). Ci.(x) \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} Ei.(-m) (e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \dots - mr_a} + e^{se^{mr} + s_1 e^{mr_1} + \dots + mr_a})$ ... (393), $\int_0^\infty e^{sCos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \dots} Sin.(sSin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \dots + r_a x). Si.(x) \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4m} \{ Ei.(m) - Ei.(-m) \} \{ e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \dots - mr_a} - e^{s + s_1 + \dots} \}$ ... (394),

$\int_0^\infty e^{sCos.rx + s_1 Cos.r_1 x + \dots} Sin.(sSin.rx + s_1 Sin.r_1 x + \dots + r_a x). Ci.(x) \frac{xdx}{m^2 + x^2} =$

$$= \frac{\pi}{4}\; Ei.(-m)\; (e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a} - e^{se^{mr}+s_1e^{mr_1}+\ldots+mr_a}) \;\ldots\ldots\ldots (395),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\ldots}\; Cos.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\ldots+r_ax)\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; xSi.(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\;\frac{\pi}{4}\;\frac{d^c}{dm^c}\;[m\,\{Ei.(-m) - Ei.(m)\}\; e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a}] \;\ldots\ldots\ldots (396),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\ldots}\; Cos.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\ldots+r_ax)\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Ci.(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\;\frac{\pi}{4}\;\frac{d^c}{dm^c}\;[Ei.(-m)\; (e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a} + e^{se^{mr}+s_1e^{mr_1}+\ldots+mr_a})] \;\ldots\; (397),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\ldots}\; Cos.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\ldots+r_ax)\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Si.(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\;\frac{\pi}{4}\;\frac{d^c}{dm^c}\;[\{Ei.(-m) - Ei.(m)\}\; e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a}] \;\ldots\ldots\ldots (398),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\ldots}\; Cos.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\ldots+r_ax)\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Ci.(x)\,\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\;\frac{\pi}{4}\;\frac{d^c}{dm^c}\;[\frac{1}{m}\,Ei.(-m)\; (e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a} + e^{se^{mr}+s_1e^{mr_1}+\ldots+mr_a})] \;\ldots\; (399),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\ldots}\; Sin.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\ldots+r_ax)\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Si.(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\;\frac{\pi}{4}\;\frac{d^c}{dm^c}\;[\{Ei.(-m) - Ei.(m)\}\; \{e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a} - e^{s+s_1+\ldots}\}] \ldots (400),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\ldots}\; Sin.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\ldots+r_ax)\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; xCi.(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\;\frac{\pi}{4}\;\frac{d^c}{dm^c}\;[m\,Ei.(-m)\; (e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a} - e^{se^{mr}+s_1e^{mr_1}+\ldots+mr_a})] \;\ldots\; (401),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\ldots}\; Sin.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\ldots+r_ax)\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Si.(x)\,\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\;\frac{\pi}{4}\;\frac{d^c}{dm^c}\;[\frac{1}{m}\,\{Ei.(m) - Ei.(-m)\}\; \{e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\ldots-mr_a} - e^{s+s_1+\ldots}\}] \;\ldots\; (402),$$

$$\int_0^\infty e^{s\,Cos.rx+s_1\,Cos.r_1x+\dots}\,Sin.(s\,Sin.rx+s_1\,Sin.r_1x+\dots+r_ex)\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,Ci.(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots-mr_e}-e^{se^{mr}+s_1e^{mr_1}+\dots+mr_e}\right]\ \dots\ (405).$$

28. Dans le raisonnement du N°. 10 on rencontre trois sortes de développements, l'un à facteurs $Cos^s rx$, l'autre à facteurs $Sin.^s rx$, le troisième, où les deux fonctions se trouvent combinées, à facteurs $Cos.^q px.\ Sin.^s rx$: toujours outre les facteurs $e^{t\,Cos.ux}$, qui se trouvent dans tous les trois développements. Ici il suffira d'employer cette troisième catégorie, c'est-à-dire les fonctions composées (*ad*), (*ae*), vu qu'elles comprennent les deux autres catégories précédentes. Lorsque, pour éviter les fractions, on y double toujours les p et les r, on aura respectivement:

$$f(\alpha,\dots)=e^{t+t_1+\dots},\ f(\alpha+\beta e^{\pm mr},\dots)=(1+e^{\pm 2mp})^q\,(1+e^{\pm 2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{\pm 2mr})^s\,(1-e^{\pm 2mr_1})^{s_1}\dots$$
$$e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots},\ f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr},\dots)=(1+e^{-(1-i)2mp})^q\dots(1-e^{-(1-i)2mr})^s\dots e^{te^{-(1-i)mu}+\dots}.$$

Mais comme les transformations des N°. 21, 22, 26 nous ont donné:

$(1+e^{-(1-i)2mp})^q=R^q(Cos.q\varphi+iSin.q\varphi)$, pour $R^2=1+2e^{-2mp}\,Cos.2mp+e^{-4mp}$, $Tang.\varphi=$ $=\dfrac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}$, $(1-e^{-(1-i)2mr})^s=T^s(Cos.s\psi-iSin.s\psi)$, pour $T^2=1-2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr}$,

$Tang.\psi=\dfrac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}$, $e^{te^{-(1-i)mu}}=e^{te^{-mu}\,Cos.mu}\left\{Cos.(te^{-mu}Sin.mu)+iSin.(te^{-mu}Sin.mu)\right\}$,

la combinaison de tous ces résultats nous fournit maintenant au moyen de la formule connue

$$(Cos.a+i\,Sin.a)\ (Cos.a_1+i\,Sin.a_1)\dots\ (Cos.b-i\ Sin.b)\ (Cos.b_1-i\ Sin.b_1)\dots=$$
$$=Cos.(a+a_1+\dots-b-b_1-\dots)+i\,Sin.(a+a_1+\dots-b-b_1-\dots)$$

$$f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr},\dots)=R^qR_1^{q_1}\dots T^sT_1^{s_1}\dots e^{te^{-mu}Cos.mu+t_1e^{-mu_1}Cos.mu_1+\dots}\Big[Cos.\{q\varphi+q_1\varphi_1+\dots$$
$$-s\psi-s_1\psi_1-\dots+te^{-mu}\,Sin.mu+t_1e^{-mu_1}\,Sin.mu_1+\dots\}+i\,Sin.\{q\varphi+q_1\varphi_1+\dots$$
$$-s\psi-s_1\psi_1-\dots+te^{-mu}\,Sin.mu+t_1e^{-mu_1}\,Sin.mu_1+\dots\}\Big],$$

et de même par la changement de i en $-i$:

$$f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr},\dots)=R^qR_1^{q_1}\dots T^sT_1^{s_1}\dots e^{te^{-mu}Cos.mu+t_1e^{-mu_1}Cos.mu_1+\dots}\Big[Cos.\{q\varphi+q_1\varphi_1+\dots$$
$$-s\psi-s_1\psi_1-\dots+te^{-mu}\,Sin.mu+t_1e^{-mu_1}\,Sin.mu_1+\dots\}-iSin.\{q\varphi+q_1\varphi_1+\dots$$
$$-s\psi-s_1\psi_1-\dots+te^{-mu}\,Sin.mu+t_1e^{-mu_1}\,Sin.mu_1+\dots\}\Big].$$

On verra que de toutes manières la fonction primitive, qui semblait être encombrée d'imaginaires, donnera lieu par les réductions ultérieures à des expressions simplement réelles; comme il en était de même dans les transformations précédentes.

De tout ce qui précède il suit par l'application aux théorèmes du N°. 20:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\mathrm{Cos}.^{q_1} p_1 x \ldots \mathrm{Sin}.^s rx.\mathrm{Sin}.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\,\mathrm{Cos}.ux + t_1 \mathrm{Cos}.u_1 x + \ldots} \mathrm{Cos}.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t\,\mathrm{Sin}.ux - t_1 \mathrm{Sin}.u_1x - \ldots\right\} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}m}(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots} \ldots (404),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\ \mathrm{Cos}.^{q_1} p_1 x \ldots \mathrm{Sin}.^s rx.\ \mathrm{Sin}.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\,\mathrm{Cos}.ux + t_1 \mathrm{Cos}.u_1 x + \ldots} \mathrm{Sin}.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t\,\mathrm{Sin}.ux - t_1 \mathrm{Sin}.u_1x - \ldots\right\} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}}\left\{(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots} - e^{t+t_1+\ldots}\right\} \ldots (405),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\ \mathrm{Cos}.^{q_1} p_1 x \ldots \mathrm{Sin}.^s rx.\ \mathrm{Sin}.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\,\mathrm{Cos}.ux + t_1 \mathrm{Cos}.u_1 x + \ldots} \mathrm{Cos}.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t\,\mathrm{Sin}.ux - t_1 \mathrm{Sin}.u_1x - \ldots\right\} \frac{\mathrm{Cos}.\left\{(c+1)\mathrm{Arctg}.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c}\left[(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots}\right] \ldots (406),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\ \mathrm{Cos}.^{q_1} p_1 x \ldots \mathrm{Sin}.^s rx.\ \mathrm{Sin}.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\,\mathrm{Cos}.ux + t_1 \mathrm{Cos}.u_1 x + \ldots} \mathrm{Cos}.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t\,\mathrm{Sin}.ux - t_1 \mathrm{Sin}.u_1x - \ldots\right\} \frac{\mathrm{Sin}.\left\{(c+1)\mathrm{Arctg}.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots}\right] \ldots\ldots (407),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\ \mathrm{Cos}.^{q_1} p_1 x \ldots \mathrm{Sin}.^s rx.\ \mathrm{Sin}.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\,\mathrm{Cos}.ux + t_1 \mathrm{Cos}.u_1 x + \ldots} \mathrm{Sin}.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t\,\mathrm{Sin}.ux - t_1 \mathrm{Sin}.u_1x - \ldots\right\} \frac{\mathrm{Cos}.\left\{(c+1)\mathrm{Arctg}.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}xdx = \frac{(-1)^{c+1}}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c}\left[m(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots}\right] \ldots (408),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\ \mathrm{Cos}.^{q_1} p_1 x \ldots \mathrm{Sin}.^s rx.\ \mathrm{Sin}.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\,\mathrm{Cos}.ux + t_1 \mathrm{Cos}.u_1 x + \ldots} \mathrm{Sin}.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t\,\mathrm{Sin}.ux - t_1 \mathrm{Sin}.u_1x - \ldots\right\} \frac{\mathrm{Sin}.\left\{(c+1)\mathrm{Arctg}.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx = \frac{(-1)^{c+1}}{1^{c/1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \frac{d^c}{dm^c}\left[(1+e^{-2mp})^q\right.$$

$(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots\ (1-e^{-2mr})^{s}\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\ e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots}]$ .... (409),

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x\ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x\ldots\ e^{t Cos.ux+t_1 Cos.u_1 x+\ldots}\ Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-\right.$$

$$\left.-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t Sin.ux - t_1 Sin.u_1 x-\ldots\right\}\frac{dx}{4m^4+x^4}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+3}m^3}(1+2e^{-2mp}Cos.2mp+e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q}(1+2e^{-2mp_1}Cos.2mp_1+$$

$$+e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1}\ldots(1-2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}(1-2e^{-2mr_1}Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\ldots$$

$$e^{te^{-mu}Cos.mu+t_1e^{-mu_1}Cos.mu_1+\ldots}\left[Cos.\left\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right)+\right.\right.$$

$$+q_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\ldots-s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)-$$

$$\left.-s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\ldots+te^{-mu}Sin.mu+t_1e^{-mu_1}Sin.mu_1+\ldots\right\}+$$

$$+Sin.\left\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right)+q_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\ldots-\right.$$

$$-s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)-s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\ldots+$$

$$\left.\left.+te^{-mu}Sin.mu+t_1e^{-mu_1}Sin.mu_1+\ldots\right\}\right]\ \ldots\ (410),\quad \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\ldots$$

$$Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\ldots\ e^{tCos.ux+t_1Cos.u_1x+\ldots}\ Cos\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+\right.$$

$$\left.+sr+s_1r_1+\ldots)x-tSin.ux-t_1Sin.u_1x-\ldots\right\}\frac{x^2dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}m}(1+2e^{-2mp}$$

$$Cos.2mp+e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q}(1+2e^{-2mp_1}Cos.2mp_1+e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1}\ldots(1-2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}$$

$$(1-2e^{-2mr_1}Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\ldots e^{te^{-mu}Cos.mu+t_1e^{-mu_1}Cos.mu_1+\ldots}$$

$$\left[Cos.\left\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right)+q_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\ldots-\right.\right.$$

$$-s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)-s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\ldots+$$

$$\left.+te^{-mu}Sin.mu+t_1e^{-mu_1}Sin.mu_1+\ldots\right\}-Sin.\left\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right)+\right.$$

$$+q_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\ldots-s\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)-$$

$$\left.\left.-s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\ldots+te^{-mu}Sin.mu+t_1e^{-mu_1}Sin.mu_1+\ldots\right\}\right]\ \ldots\ (411),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\ldots\ e^{tCos.ux+t_1Cos.u_1x+\ldots}\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-\right.$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin. ux - t_1 \, Sin. u_1 x - \ldots \Big\} \frac{x dx}{4m^4 + x^4} =$$

$$= \frac{-\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2} m^2} (1 + 2 e^{-2mp} \, Cos. 2mp + e^{-4mp})^{\frac{1}{2} q} (1 + 2 e^{-2mp_1} \, Cos. 2mp_1 +$$

$$+ e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2} q_1} \ldots (1 - 2 e^{-2mr} \, Cos. 2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2} s} (1 - 2 e^{-2mr_1} \, Cos. 2mr_1 + e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2} s_1} \ldots$$

$$e^{t e^{-mu} \, Cos. mu + t_1 e^{-mu_1} \, Cos. mu_1 + \ldots} \quad Sin. \Big\{ q \, Arctg. \left(\frac{Sin. 2mp}{e^{2mp} + Cos. 2mp} \right) +$$

$$+ q_1 \, Arctg. \left(\frac{Sin. 2mp_1}{e^{2mp_1} + Cos. 2mp_1} \right) + \ldots - s \, Arctg. \left(\frac{Sin. 2mr}{e^{2mr} - Cos. 2mr} \right) -$$

$$- s_1 \, Arctg. \left(\frac{Sin. 2mr_1}{e^{2mr_1} - Cos. 2mr_1} \right) - \ldots + t e^{-mu} \, Sin. mu + t_1 e^{-mu_1} \, Sin. mu_1 + \ldots \Big\} \ \ldots \ (412),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t \, Cos. ux + t_1 \, Cos. u_1 x + \ldots} \; Sin. \Big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin. ux - t_1 \, Sin. u_1 x - \ldots \Big\} \frac{x^3 dx}{4m^4 + x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}} \Big[e^{t+t_1+\ldots} - (1 + 2 e^{-2mp} \, Cos. 2mp + e^{-4mp})^{\frac{1}{2} q} (1 + 2 e^{-2mp_1} \, Cos. 2mp_1 +$$

$$+ e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2} q_1} \ldots (1 - 2 e^{-2mr} \, Cos. 2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2} s} (1 - 2 e^{-2mr_1} \, Cos. 2mr_1 + e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2} s_1} \ldots$$

$$e^{t e^{-mu} \, Cos. mu + t_1 e^{-mu_1} \, Cos. mu_1 + \ldots} \quad Cos. \Big\{ q \, Arctg. \left(\frac{Sin. 2mp}{e^{2mp} + Cos. 2mp} \right) +$$

$$+ q_1 \, Arctg. \left(\frac{Sin. 2mp_1}{e^{2mp_1} + Cos. 2mp_1} \right) + \ldots - s \, Arctg. \left(\frac{Sin. 2mr}{e^{2mr} - Cos. 2mr} \right) -$$

$$- s_1 \, Arctg. \left(\frac{Sin. 2mr_1}{e^{2mr_1} - Cos. 2mr_1} \right) - \ldots + t e^{-mu} \, Cos. mu + t_1 e^{-mu_1} \, Sin. mu_1 + \ldots \Big\} \Big] \ \ldots\ldots\ldots \ (413),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t \, Cos. ux + t_1 \, Cos. u_1 x + \ldots} \; Cos. \Big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin. ux - t_1 \, Sin. u_1 x - \ldots \Big\}. \; Si.(x) \frac{x dx}{m^2 + x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \Big\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \Big\} (1 + e^{-2mp})^q (1 + e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1 - e^{-2mr})^s$$

$$(1 - e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots e^{t e^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \ldots} \ \ldots\ldots\ldots \ (414), \quad \int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx.$$

$$Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t \, Cos. ux + t_1 \, Cos. u_1 x + \ldots} \; Cos. \Big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x -$$

$$- t \, Sin. ux - t_1 \, Sin. u_1 x \ldots \Big\}. \; Ci.(x) \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2} m} Ei.(-m) \; (e^{mp} + e^{-mp})^q$$

$$(e^{mp_1} + e^{-mp_1})^{q_1} \ldots (e^{mr} - e^{-mr})^s (e^{mr_1} - e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \Big\{ (-1)^{s + s_1 + \ldots}$$

$$e^{t e^{mu} + t_1 e^{mu_1} + \ldots + (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m} + e^{t e^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \ldots - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m} \Big\} (415),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \ldots}\ Sin. \{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t Sin. ux - t_1 Sin. u_1 x \ldots \}.\ Si.(x) \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \{ Ei.(-m) - Ei.(m) \} \{ (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots} - e^{t+t_1+\ldots} \} \quad (416),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \ldots}\ Sin. \{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t Sin. ux - t_1 Sin. u_1 x - \ldots \}.\ Ci.(x) \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} Ei.(-m)\ (e^{mp}+e^{-mp})^q (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1} \ldots (e^{mr}-e^{-mr})^s (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \{ (-1)^{s+s_1+\ldots} e^{te^{mu}+t_1e^{mu_1}+\ldots+(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} - e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} \} \quad (417),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \ldots}\ Cos. \{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t Sin. ux - t_1 Sin. u_1 x - \ldots \} \frac{Cos. \{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} x Si.(x)\ dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \frac{d^c}{dm^c} [m \{ Ei.(-m) - Ei.(m) \} (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots}] \ \ldots\ldots \quad (418),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \ldots}\ Cos. \{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t Sin. ux - t_1 Sin. u_1 x - \ldots \} \frac{Cos. \{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Ci.(x)\ dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \frac{d^c}{dm^c} [Ei.(-m)\ (e^{mp}+e^{-mp})^q (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1} \ldots (e^{mr}-e^{-mr})^s (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \{ (-1)^{s+s_1+\ldots} e^{te^{mu}+t_1e^{mu_1}+\ldots+(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} + e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m} \} \quad (419),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \ldots}\ Cos. \{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t Sin. ux - t_1 Sin. u_1 x - \ldots \} \frac{Sin. \{ (c+1) Arctg. \frac{x}{m} \}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Si.(x)\ dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}} \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \frac{d^c}{dm^c} [\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \} (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\ldots}] \ \ldots \quad (420),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \ldots}\ Cos. \{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin.\, ux - t_1 \, Sin.\, u_1 x - \ldots \}$$

$$\frac{Sin.\left\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \; Ci.(x) \; \frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \; \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \; \frac{d^c}{dm^c} \; [\frac{1}{m} Ei.(-m)$$

$$(e^{mp} + e^{-mp})^q \; (e^{mp_1} + e^{-mp_1})^{q_1} \ldots \; (e^{mr} - e^{-mr})^s \; (e^{mr_1} - e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \; \{(-1)^{s+s_1+\ldots}$$

$$e^{te^{mu} + t_1 e^{mu_1} + \ldots + (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m} + e^{te^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \ldots - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m} \}] \; (421),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots} \; Sin. \{(s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin.\, ux - t_1 \, Sin.\, u_1 x - \ldots \}$$

$$\frac{Cos.\left\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \; Si.(x) \; dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \; \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \; \frac{d^c}{dm^c} \; [\{Ei.(-m) - Ei.(m)\}$$

$$\{(1+e^{-2mp})^q \; (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s \; (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots e^{te^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \ldots} - e^{t + t_1 + \ldots} \}] \; (422),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots} \; Sin. \{(s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin.\, ux - t_1 \, Sin.\, u_1 x - \ldots \}$$

$$\frac{Cos.\left\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \; x \, Ci.(x) \; dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \; \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \; \frac{d^c}{dm^c} \; [m \, Ei.(-m)$$

$$(e^{mp} + e^{-mp})^q \; (e^{mp_1} + e^{-mp_1})^{q_1} \ldots \; (e^{mr} - e^{-mr})^s \; (e^{mr_1} - e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \; \{(-1)^{s+s_1+\ldots}$$

$$e^{te^{mu} + t_1 e^{mu_1} + \ldots + (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m} - e^{te^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \ldots - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m} \}] \; (423),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots} \; Sin. \{(s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin.\, ux - t_1 \, Sin.\, u_1 x - \ldots \}$$

$$\frac{Sin.\left\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \; Si.(x) \; \frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \; \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \; \frac{d^c}{dm^c} \; [\frac{1}{m} \{Ei.(-m) - Ei.(m)\}$$

$$\{(1+e^{-2mp})^q \; (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s \; (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots e^{te^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \ldots} - e^{t + t_1 + \ldots} \}] \; (424),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots} \; Sin. \{(s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin.\, ux - t_1 \, Sin.\, u_1 x - \ldots \}$$

$$\frac{Sin.\left\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} \; Ci.(x) \; dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}} \; \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2}} \; \frac{d^c}{dm^c} \; [Ei.(-m)$$

$$(e^{mp} + e^{-mp})^q \; (e^{mp_1} + e^{-mp_1})^{q_1} \ldots \; (e^{mr} - e^{-mr})^s \; (e^{mr_1} - e^{-mr_1})^{s_1} \ldots \; \{(-1)^{s+s_1+\ldots}$$

$$e^{te^{mu} + t_1 e^{mu_1} + \ldots + (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m} - e^{te^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \ldots - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m} \}] \; (425).$$

Au sujet de toutes ces intégrales il faut observer que dans les trois sortes de

fonctions $Cos.^q px$, $Sin.^s rx$, $e^{tCos.ux}$, dont pour chacune le nombre est absolument arbitraire, les q, les s, les t peuvent aussi s'évanouir, de sorte que nous aurons des combinaisons de $Sin.^s rx$ avec $e^{tCos.ux}$, de $Cos.^q px$ avec $e^{tCos.ux}$, et de $Cos.^q px$ avec $Sin.^s rx$: de ces dernières nous avons déjà traité précédemment au N°. 23. Toutefois il est clair qu'alors les fonctions correspondantes dans les valeurs des intégrales ne doivent plus y entrer.

29. On peut encore différentier toutes ces intégrales par rapport à la constante t, et ainsi l'on obtiendra en général une intégrale de la forme:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \dots\ e^{tCos.ux + t_1 Cos.u_1 x + \dots}\ Cos.[\text{ou}\, Sin.] \{ (s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_0)x - tSin.ux - t_1 Sin.u_1 x - \dots \} \varphi(x) \frac{dx}{m^2+x^2} \quad . \; . \; . \quad (\alpha_4)$$

A l'égard de cette intégrale observons:

1t. qu'il n'est plus nécessaire que la constante u_0 soit comprise parmi les u qui se trouvent dans l'exponentielle, quoique telle en ait été l'origine,

2t. que des quatre sortes de fonctions $Cos.^q px$, $Sin^s rx$, $e^{tCos.ux}$, $u_0 x$, il peut s'en trouver dans l'intégrale telles et autant qu'on le voudrait,

3t. que de chacune de ces trois premières fonctions le nombre est parfaitement arbitraire.

Lorsqu'on a égard aux Numéros antérieurs, la différentiation par rapport à d'autres constantes n'offre pas de difficultés, néanmoins nous n'en admettrons ici que ce cas spécial, pour parvenir à d'autres résultats tout différents, en ce que les intégrales contiennent sous les signes trigonométriques *Sin.* ou *Cos.* un terme $u_0 x$, qui ne dépend nullement des exposants q et s. Or, c'est ce que l'on obtient encore en annulant les t après la différentiation. Ainsi l'on a:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \dots\ e^{tCos.ux + t_1 Cos.u_1 x + \dots}\ Cos. \{ (s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_0)x - tSin.ux - t_1 Sin.u_1 x - \dots \} \frac{dx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1} m} (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \dots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \dots e^{te^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \dots - mu_0} \quad \dots\dots \quad (126),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \dots\ e^{tCos.ux + t_1 Cos.u_1 x + \dots}\ Sin. \{ (s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_0)x - tSin.ux - t_1 Sin.u_1 x - \dots \} \frac{x\,dx}{m^2+x^2} = \frac{-\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}} (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \dots$$

$(1-e^{-2mr})^{s}\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\ e^{te^{-mn}+t_1e^{-mn_1}+\ldots-mu_0}\ \ldots$ (427), [59] $\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x\ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1x\ldots\ e^{t\,Cos.nx+t_1\,Cos.n_1x+\ldots}\ Cos.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+$

---

[59] Montrons ici par un seul exemple les divers cas spéciaux que comportent nos intégrales générales. A cet effet annulons d'abord les t, afin d'obtenir (en écrivant maintenant u au lieu de u_0):

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x\ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1x\ldots\ Cos.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u)x\}\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}m}\ (1+e^{-2mp})^q\ (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots\ (1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\ e^{-mu}\ \ldots\ (428),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x\ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1x\ldots\ Sin.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u)x\}\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=$$
$$=\frac{-\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}}\ (1+e^{-2mp})^q\ (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots\ (1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\ e^{-mu}\ \ldots\ (429).$$

Puis faisons disparaître tantôt les s, tantôt les q, et nous aurons:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x\ldots\ Cos.\{(qp+q_1p_1+\ldots+u)x\}\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+1}m}\ (1+e^{-2mp})^q\ (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots\ e^{-mu}\ (430),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x\ldots\ Sin.\{(qp+q_1p_1+\ldots+u)x\}\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=$$
$$=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+1}m}\ (1+e^{-2mp})^q\ (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots\ e^{-mu}\ \ldots\ (431),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1x\ldots\ Cos.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\ldots+u)x\}\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}m}\ (1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\ e^{-mu}\ \ldots\ (432),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1x\ldots\ Sin.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-(sr+s_1r_1+\ldots+u)x\}\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=$$
$$=\frac{-\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}m}\ (1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\ e^{-mu}\ \ldots\ (433).$$

Simplifions maintenant les deux premières par la supposition de $qp+q_1p_1+\ldots+u=t$, où il va sans dire que cette constante t est tout autre que celles qui se trouvaient d'abord dans les exponentielles, maintenant disparues; alors nous avons $e^{-mu}=e^{(qp+q_1p_1+\ldots-t)m}=e^{mp.q}.\ e^{mp_1.q_1}.\ \ldots\ .\ e^{-mt}$, dont les facteurs $e^{mp.q}\ldots$, combinés avec les autres facteurs $(1+e^{-2mp})^q,\ldots$, donnent tout de suite $(e^{mp}+e^{-mp})^q,\ldots$. De même pour les deux dernières formules il faut prendre $sr+s_1r_1+\ldots+u=t$, et ici le facteur e^{-mu}, combiné avec les autres $(1-e^{-2mr})^s,\ldots$ donnera outre le facteur e^{-mt} encore d'autres de la forme $(e^{mr}-e^{-mr})^s,\ldots$. Ainsi nous trouverons:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x\ldots\ Cos.\ tx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+1}m}\ (e^{mp}+e^{-mp})^q\ (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1}\ldots\ e^{-mt}\ \ldots\ (434),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x\ldots\ Sin.\ tx\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+1}}\ (e^{mp}+e^{-mp})^q$$

$+ \; sr + s_1 r_1 + \ldots + u_s)x - t \, Sin. \, ux - t_1 \, Sin. \, u_1 x - \ldots \} \dfrac{dx}{4m^4+x^4} =$

$= \dfrac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+3} m^3} (1 + 2 e^{-2mp} \, Cos. 2mp + e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q} (1 + 2 e^{-2mp_1} \, Cos. 2mp_1 +$
$+ e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1} \ldots (1 - 2 e^{-2mr} \, Cos. 2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s} (1 - 2 e^{-2mr_1} \, Cos. 2mr_1 + e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1} \ldots e^{te^{-mu}}$
$^{Cos. mu + t_1 e^{-mu_1} Cos. mu_1 + \ldots - mu_s} \Big[Cos. \Big\{ q \, Arctg \left(\dfrac{Sin. 2mp}{e^{2mp} + Cos. 2mp} \right) + q_1 \, Arctg. \left(\dfrac{Sin. 2mp_1}{e^{2mp_1} + Cos. 2mp_1} \right) + \ldots -$
$- s \, Arctg. \left(\dfrac{Sin. 2mr}{e^{2mr} - Cos. 2mr} \right) - s_1 \, Arctg. \left(\dfrac{Sin. 2mr_1}{e^{2mr_1} - Cos. 2mr_1} \right) - \ldots + te^{-mu} \, Sin. mu + t_1 e^{-mu_1}$
$Sin. mu_1 + \ldots - mu_s \Big\} + Sin. \Big\{ q \, Arctg. \left(\dfrac{Sin. 2mp}{e^{2mp} + Cos. 2mp} \right) + q_1 \, Arctg. \left(\dfrac{Sin. 2mp_1}{e^{2mp_1} + Cos. 2mp_1} \right) + \ldots -$
$- s \, Arctg. \left(\dfrac{Sin. 2mr}{e^{2mr} - Cos. 2mr} \right) - s_1 \, Arctg. \left(\dfrac{Sin. 2mr_1}{e^{2mr_1} - Cos. 2mr_1} \right) - \ldots + te^{-mu} \, Sin. mu + t_1 e^{-mu_1}$
$Sin. mu_1 + \ldots - mu_s \Big\} \Big] \ldots (442)$, $\int_0^\infty Cos.^q px. \, Cos.^{q_1} p_1 x \ldots Sin.^s rx. \, Sin.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \ldots}$
$Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_s)x - t \, Sin. \, ux -$
$- t_1 \, Sin. \, u_1 x - \ldots \} \dfrac{x^2 dx}{4m^4+x^4} = \dfrac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+2} m} (1 + 2 e^{-2mp} \, Cos. 2mp + e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q}$
$(1 + 2 e^{-2mp_1} \, Cos. 2mp_1 + e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1} \ldots (1 - 2 e^{-2mr} \, Cos. 2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s} (1 - 2 e^{-2mr_1}$

$(e^{mp_1} + e^{-mp_1})^{q_1} \ldots e^{-mt} \ldots (435)$ (où $t > qp + q_1 p_1 + \ldots$), $\int_0^\infty Sin.^s rx. \, Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$
$Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - tx \} \dfrac{dx}{m^2+x^2} = \dfrac{\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1} m} (e^{mr} - e^{-mr})^s (e^{mr_1} - e^{-mr_1})^{s_1} \ldots$
$e^{-mt} \ldots (436)$, $\int_0^\infty Sin.^s rx. \, Sin.^{s_1} r_1 x \ldots Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - tx \} \dfrac{xdx}{m^2+x^2} =$
$= \dfrac{-\pi}{2^{s+s_1+\ldots+1}} (e^{mr} - e^{-mr})^s (e^{mr_1} - e^{-mr_1})^{s_1} \ldots e^{-mt} \ldots (437)$ (où $t > sr + s_1 r_1 + \ldots$).

Enfin bornons-nous à un seul facteur $Cos.^q px.$ ou $Sin.^s rx$; alors les résultats
$\int_0^\infty Cos.^q px. \, Cos. \, tx \dfrac{dx}{m^2+x^2} = \dfrac{\pi}{2^{q+1} m} (e^{mp} + e^{-mp})^q e^{-mt} \ldots (438)$, $\int_0^\infty Cos.^q px.$
$Sin. \, tx \dfrac{xdx}{m^2+x^2} = \dfrac{\pi}{2^{q+1}} (e^{mp} + e^{-mp})^q e^{-mt} \ldots (439)$ (où $t > qp$), $\int_0^\infty Sin.^s rx. \, Cos. (\tfrac{1}{2} s \pi -$
$- tx) \dfrac{dx}{m^2+x^2} = \dfrac{\pi}{2^{s+1} m} (e^{mr} - e^{-mr})^s e^{-mt} \ldots (440)$, $\int_0^\infty Sin.^s rx. \, Sin. (\tfrac{1}{2} s\pi - tx) \dfrac{xdx}{m^2+x^2} =$
$= \dfrac{\pi}{2^{s+1}} (e^{mr} - e^{-mr})^s e^{-mt} \ldots (441)$ (où $t > sr$), coïncident avec des intégrales que j'avais déjà déduites dans ma Note „Réduction etc." insérée dans le Tome V des Verhand. der Kon. Akademie van Wetenschappen, sous les formules (23), (55), (111) et (113), (157) et (160).

$\mathrm{Cos}.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac12 s_1}\dots\ e^{te^{-mu}\,\mathrm{Cos}.mu+t_1e^{-mu_1}\,\mathrm{Cos}.mu_1+\dots-mu_a}\,[\mathrm{Cos}.\{q\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mp}{e^{2mp}+\mathrm{Cos}.2mp}\right)+$

$+q_1\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mp_1}{e^{2mp_1}+\mathrm{Cos}.2mp_1}\right)+\dots-s\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mr}{e^{2mr}-\mathrm{Cos}.2mr}\right)-s_1\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mr_1}{e^{2mr_1}-\mathrm{Cos}.2mr_1}\right)-\dots+$

$+\ te^{-mu}\ \mathrm{Sin}.mu+t_1e^{-mu_1}\ \mathrm{Sin}.mu_1+\dots-mu_a\}-\mathrm{Sin}.\{q\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mp}{e^{2mp}+\mathrm{Cos}.2mp}\right)+$

$+q_1\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mp_1}{e^{2mp_1}+\mathrm{Cos}.2mp_1}\right)+\dots-s\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mr}{e^{2mr}-\mathrm{Cos}.2mr}\right)-s_1\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mr_1}{e^{2mr_1}-\mathrm{Cos}.2mr_1}\right)-\dots+$

$+\ te^{-mu}\ \mathrm{Sin}.mu+t_1e^{-mu_1}\ \mathrm{Sin}.mu_1+\dots-mu_a\}]\ \dots\ (443),\ \int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\ \ \mathrm{Cos}.^{q_1}p_1x\dots$

$\mathrm{Sin}.^s rx.\ \ \mathrm{Sin}.^{s_1}r_1x\dots\ e^{t\,\mathrm{Cos}.ux+t_1\mathrm{Cos}.u_1x+\dots}\ \mathrm{Sin}.\{(s+s_1+\dots)\tfrac12\pi-(qp+q_1p_1+\dots+$

$+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x-t\,\mathrm{Sin}.ux-t_1\,\mathrm{Sin}.u_1x-\dots\}\ \frac{x\,dx}{4m^4+x^4}=\frac{-\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}m^2}(1+2e^{-2mp}$

$\mathrm{Cos}.2mp+e^{-4mp})^{\frac12 q}\ (1+2e^{-2mp_1}\ \mathrm{Cos}.2mp_1+e^{-4mp_1})^{\frac12 q_1}\dots\ (1-2e^{-2mr}\ \mathrm{Cos}.2mr+e^{-4mr})^{\frac12 s}$

$(1-2\ e^{-2mr_1}\ \ \mathrm{Cos}.\ 2mr_1\ +\ e^{-4mr_1})^{\frac12 s_1}\dots\ \ e^{te^{-mu}\ \mathrm{Cos}.mu+t_1e^{-mu_1}\ \mathrm{Cos}.mu_1+\dots-mu_a}$

$\mathrm{Sin}.\{q\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mp}{e^{2mp}+\mathrm{Cos}.2mp}\right)+q_1\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mp_1}{e^{2mp_1}+\mathrm{Cos}.2mp_1}\right)+\dots-s\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mr}{e^{2mr}-\mathrm{Cos}.2mr}\right)-$

$-s_1\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mr_1}{e^{2mr_1}-\mathrm{Cos}.2mr_1}\right)-\dots+te^{-mu}\,\mathrm{Sin}.mu+t_1e^{-mu_1}\,\mathrm{Sin}.mu_1+\dots-mu_a\}\ \dots\ (444),$

$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\ \ \mathrm{Cos}.^{q_1}p_1x\dots\ \ \mathrm{Sin}.^s rx.\ \ \mathrm{Sin}.^{s_1}r_1x\dots\ \ e^{t\,\mathrm{Cos}.ux+t_1\mathrm{Cos}.u_1x\dots}\ \ \mathrm{Sin}.\{(s+s_1+\dots)\tfrac12\pi-$

$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x-t\,\mathrm{Sin}.ux-t_1\,\mathrm{Sin}.u_1x-\dots\}\ \frac{x^3\,dx}{4m^4+x^4}=$

$=\frac{-\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}}(1+2\ e^{-2mp}\ \mathrm{Cos}.2mp+e^{-4mp})^{\frac12 q}\ \ (1+2\ e^{-2mp_1}\ \mathrm{Cos}.2mp_1+$

$+e^{-4mp_1})^{\frac12 q_1}\dots\ (1-2\ e^{-2mr}\ \mathrm{Cos}.2mr+e^{-4mr})^{\frac12 s}\ (1-2\ e^{-2mr_1}\ \mathrm{Cos}.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac12 s_1}\dots$

$e^{te^{-mu}\ \mathrm{Cos}.mu+t_1e^{-mu_1}\ \mathrm{Cos}.mu_1+\dots-mu_a}\quad \mathrm{Cos}.\{q\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mp}{e^{2mp}+\mathrm{Cos}.2mp}\right)+$

$+q_1\,\mathrm{Arctg}.\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mp_1}{e^{2mp_1}+\mathrm{Cos}.2mp_1}\right)+\dots-s\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mr}{e^{2mr}-\mathrm{Cos}.2mr}\right)-s_1\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{\mathrm{Sin}.2mr_1}{e^{2mr_1}-\mathrm{Cos}.2mr_1}\right)-\dots+$

$+te^{-mu}\,\mathrm{Sin}.mu+t_1e^{-mu_1}\,\mathrm{Sin}.mu_1+\dots-mu_a\}\ \dots\ (445),$ [60] $\int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\ \ \mathrm{Cos}.^{q_1}p_1x\dots$

---

[60] Dans ces quatre intégrales annulons d'abord tous les t et prenons u pour le seul u_a, qui y reste indépendamment des t. Puis faisons disparaître tous les s et tous les q à l'exception une fois de q, l'autre fois de s. De cette manière nous trouverons les intégrales simples suivantes:

$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.^q px.\ \ \mathrm{Cos}.\,tx\ \ \frac{dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{2^{q+3}m^3}\ (e^{2mp}+2\,\mathrm{Cos}.\,2mp+e^{-2mp})^{\frac12 q}\ e^{-mt}$

$Sin.^{s} rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \ldots}\ Cos. \left\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + \right.$
$\left. + s_1 r_1 + \ldots + u_s) x - t\, Sin.\, ux - t_1\, Sin.\, u_1 x - \ldots \right\}.\ Si.(x)\ \frac{x dx}{m^2 + x^2} =$
$= \frac{\pi}{2^{q + q_1 + \ldots + s + s_1 + \ldots + 2}} \left\{ Ei.(-m) - Ei.(m) \right\} (1 + e^{-2mp})^{q} (1 + e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1 - e^{-2mr})^{s}$

$[Cos. \left\{ q\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mp}{e^{2mp} + Cos.\, 2mp} \right) + mpq - mt \right\} + Sin. \left\{ q\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mp}{e^{2mp} + Cos.\, 2mp} \right) + \right.$
$\left. + mpq - mt \right\}] \ldots (446),\ \int_0^\infty Cos.^{q} px.\ Cos.\, tx\ \frac{x^2 dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2^{q+2} m} (e^{2mp} + 2 Cos.\, 2mp + e^{-2mp})^{\frac{1}{2}q} e^{-m}$
$[Cos. \left\{ q\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mp}{e^{2mp} + Cos.\, 2mp} \right) + mpq - mt \right\} - Sin. \left\{ q\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mp}{e^{2mp} + Cos.\, 2mp} \right) + \right.$
$\left. + mpq - mt \right\}] \ldots (447),\ \int_0^\infty Cos.^{q} px.\ Sin.\, tx\ \frac{x dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2^{q+2} m^2} (e^{2mp} + 2 Cos.\, 2mp + e^{-2mp})^{\frac{1}{2}q}$
$e^{-mt}\ Sin. \left\{ q\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mp}{e^{2mp} + Cos.\, 2mp} \right) + mpq - mt \right\} \ldots (448),\ \int_0^\infty Cos.^{q} px.\ Sin.\, tx\ \frac{x^3 dx}{4m^4 + x^4} =$
$= \frac{\pi}{2^{q+1}} (e^{2mp} + 2 Cos.\, 2mp + e^{-2mp})^{\frac{1}{2}q}\ e^{-mt}\ Cos. \left\{ q\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mp}{e^{2mp} + Cos.\, 2mp} \right) + \right.$
$\left. + mpq - mt \right\} \ldots (449)$, (où partout $t > pq$); $\int_0^\infty Sin.^{s} rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - tx)\ \frac{dx}{4m^4 + x^4} =$
$= \frac{\pi}{2^{s+3} m^3} (e^{2mr} - 2 Cos.\, 2mr + e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}\ e^{-mt}\ [Cos. \left\{ s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr} \right) - \right.$
$\left. - msr + mt \right\} - Sin. \left\{ s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr} \right) - msr + mt \right\}] \ldots (450),\ \int_0^\infty Sin.^{s} rx.$
$Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - tx) \frac{x^2 dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2^{s+2} m} (e^{2mr} - 2 Cos.\, 2mr + e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}\ e^{-mt}\ [Cos. \left\{ s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr} \right) - \right.$
$\left. - msr + mt \right\} + Sin. \left\{ s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr} \right) - msr + mt \right\}] \ldots (451),\ \int_0^\infty Sin.^{s} rx.$
$Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - tx) \frac{x dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2^{s+2} m^2} (e^{2mr} - 2 Cos.\, 2mr + e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}\ e^{-mt}\ Sin. \left\{ s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr} \right) - \right.$
$\left. - msr + mt \right\} \ldots (452),\ \int_0^\infty Sin.^{s} rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - tx)\ \frac{x^3 dx}{4m^4 + x^4} = \frac{-\pi}{2^{s+1}} (e^{2mr} - 2 Cos.\, 2mr +$
$+ e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}\ e^{-mt}\ Cos. \left\{ s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr} \right) - msr + mt \right\} \ldots (453)$, (où $t > sr$ partout).

Dans ces intégrales on a réduit tout d'abord à $Cos.\, tx$ ou à $Sin.\, tx$ etc. les facteurs *Cosinus* ou *Sinus* d'un argument composé; et à cet effet on a dû prendre dans les quatre premières formules $t = u + qp$, dans les quatre dernières $t = u + sr$. Or, u est positif d'après son origine; donc on a dans celles-ci la condition $t > sr$, et dans celles-là $t > pq$. Il est clair que ce t ne doit pas être confondu avec les constantes t dans le texte, où elles entrent dans l'exponentielle que l'on a fait disparaître tout d'abord dans cette Note.

$$(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots\ e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-mu_a}\ \dots\ (455),$$

$$\int_0^\infty \text{Cos.}^q px.\ \text{Cos.}^{q_1}p_1x\dots\ \text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}^{s_1}r_1x\dots\ e^{t\,\text{Cos.}\,ux+t_1\,\text{Cos.}\,u_1x+\dots}\ \text{Cos.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x-t\,\text{Sin.}\,ux-t_1\,\text{Sin.}\,u_1x-\dots\}.\ Ci.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=$$
$$=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}m}\ Ei.(-m)\ (e^{mp}+e^{-mp})^q\ (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1}\dots\ (e^{mr}-e^{-mr})^s\ (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\dots\ \{(-1)^{s+s_1+\dots}\ e^{te^{mu}+t_1e^{mu_1}+\dots+(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)m}+$$
$$+e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)m}\}\ \dots\ (456),$$

$$\int_0^\infty \text{Cos.}^q px.\ \text{Cos.}^{q_1}p_1x\dots\ \text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}^{s_1}r_1x\dots\ e^{t\,\text{Cos.}\,ux+t_1\,\text{Cos.}\,u_1x+\dots}\ \text{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x-t\,\text{Sin.}\,ux-t_1\,\text{Sin.}\,u_1x-\dots\}.\ Si.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=$$
$$=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}m}\ \{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\ (1+e^{-2mp})^q\ (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots\ (1-e^{-2mr})^s\ (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots\ e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-mu_a}\ \dots\ (457),$$

$$\int_0^\infty \text{Cos.}^q px.\ \text{Cos.}^{q_1}p_1x\dots\ \text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}^{s_1}r_1x\dots\ e^{t\,\text{Cos.}\,ux+t_1\,\text{Cos.}\,u_1x+\dots}\ \text{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+mu_a)x-t\,\text{Sin.}\,ux-t_1\,\text{Sin.}\,u_1x-\dots\}.\ Ci.(x)\frac{xdx}{m^2+x^2}=$$
$$=\frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+2}}\ Ei.(-m)\ (e^{mp}+e^{-mp})^q\ (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1}\dots\ (e^{mr}-e^{-mr})^s\ (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\dots\ \{(-1)^{s+s_1+\dots}\ e^{te^{mu}+t_1e^{mu_1}+\dots+(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)m}-$$
$$-e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)m}\}\ \dots\ (458)\ [61].$$

---

[61] Nous pouvons soumettre ces quatre intégrales au même procédé, qu'ont subi les formules antérieures dans la note précédente. Ainsi nous trouverons:

$$\int_0^\infty \text{Cos.}^q px.\ \text{Cos.}\,tx.\ Si.(x)\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+2}}\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\ (e^{mp}+e^{-mp})^q\ e^{-mt}\ \dots\ (459),$$

$$\int_0^\infty \text{Cos.}^q px.\ \text{Cos.}\,tx.\ Ci.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+2}m}\ Ei.(-m)\ (e^{mp}+e^{-mp})^q\ (e^{mt}+e^{-mt})\ \dots\ (460),$$

$$\int_0^\infty \text{Cos.}^q px.\ \text{Sin.}\,tx.\ Si.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+2}m}\{Ei.(m)-Ei.(-m)\}\ (e^{mp}+e^{-mp})^q\ e^{-mt}\ \dots\ (461),$$

$$\int_0^\infty \text{Cos.}^q px.\ \text{Sin.}\,tx.\ Ci.(x)\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+2}}Ei.(-m)\ (e^{mp}+e^{-mp})^q\ (e^{-mt}-e^{mt})\ \dots\ (462),\ \text{(où partout } t > pq\text{)},$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi-tx).\ Si.(x)\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{s+2}}\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\ (e^{mr}-e^{-mr})^s\ e^{-mt}\ \dots\ (463),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi-tx).\ Ci.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{s+2}m}Ei.(-m)\ (e^{mr}-e^{-mr})^s\ \{(-1)^s e^{mt}+e^{-mt}\}\ \dots\ (464).$$

Quant à toutes ces intégrales définies, ici valent les mêmes observations qu'aux Numéros précédents, et nous en avons déjà fait usage dans les notes, afin de parvenir à des résultats très-simples et dignes d'intérêt, lesquels, lorsqu'il en serait besoin, peuvent servir ainsi à démontrer l'importance des résultats, qu'on vient d'obtenir.

30. Passons maintenant à des résultats, qui nous seront fournis par les formules du N°. 13. Quant au premier couple (af), (ag), nous avons $f(\alpha)=1$, $f(\alpha+\beta e^{\pm mr})=$

$$= \frac{1-e^{\pm smr}}{1-e^{\pm mr}},\ f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr}) = \frac{1-e^{-(1-i)smr}}{1-e^{-(1-i)mr}} = \frac{1-e^{-smr}(Cos.smr+i\,Sin.smr)}{1-e^{-mr}(Cos.mr+i\,Sin.mr)} =$$

$$= \frac{\{(1-e^{-smr}\,Cos.smr)-i\,e^{-smr}\,Sin.smr\}\ \{(1-e^{-mr}\,Cos.mr)+i\,e^{-mr}\,Sin.mr\}}{(1-e^{-mr}\,Cos.mr)^2+(e^{-mr}\,Sin.mr)^2} =$$

$$= \frac{[1-e^{-mr}\,Cos.mr-e^{-smr}\,Cos.smr+e^{-(s+1)mr}\,Cos.\{(s-1)mr\}] + i\,[e^{-mr}\,Sin.mr-e^{-smr}\,Sin.smr+e^{-(s+1)mr}\,Sin.\{(s-1)mr\}]}{1-2e^{-mr}\,Cos.mr+e^{-2mr}},$$

d'où, en changeant le signe de i: $f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr}) =$

$$= \frac{[1-e^{-mr}\,Cos.mr-e^{-smr}\,Cos.smr+e^{-(s+1)mr}\,Cos.\{(s-1)mr\}] - i\,[e^{-mr}\,Sin.mr-e^{-smr}\,Sin.smr+e^{-(s+1)mr}\,Sin.\{(s-1)mr\}]}{1-2e^{-mr}\,Cos.mr+e^{-2mr}}.$$

Ainsi par l'intermédiaire des théorèmes du N°. 20, nous trouverons successivement, pour des r doubles, comme plus haut:

$\int_0^\infty [1-Cos.2srx+Sin.2srx.\ Cot.rx]\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m}\,\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}$, donc à cause de $\int_0^\infty \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\ \dots\ (\alpha x)$ (T. 19, N°. 2) et de l'intégrale (?) (T. 205, N°. 5): $\int_0^\infty Sin.2srx.\ Cot.rx\,\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}(1-e^{-2smr})\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}$ (467); puis $\int_0^\infty [-Sin.2srx+$

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi-tx).\ Si.(x)\,\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2}m}\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\,(e^{mr}-e^{-mr})^s\,e^{-mt}\ \dots\ (465)$,

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi-tx).\ Ci.(x)\,\frac{x\,dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+2}}\,Ei.(-m)\,(e^{mr}-e^{-mr})^s\,\{(-1)^s e^{mt}-e^{-mt}\}$ (466).

(où partout $t > sr$).

Observons pour nous garantir de toute méprise à cet égard, que le t de cette note est tout autre que les t dans le texte. Les équations de condition respectives pour t sont les mêmes que plus haut.

$+ \ (1 - Cos.\,2srx)\ \ Cot.\,rx]\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \pi \left\{ \frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}} - 1 \right\}$, d'où par T. 205, N°. 4, l'intégrale (χ): $\int_0^\infty (1 - Cos.\,2srx)\ \ Cot.\,rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = 2 \int_0^\infty Sin.^2 srx.\ \ Cot.\,rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} =$

$= \frac{\pi}{2}\,\frac{2\,e^{-2mr} - e^{-2smr} - e^{-(s+1)2mr}}{1-e^{-2mr}}$ (468); donc $\int_0^\infty Sin.2srx.\ Cot.rx\ \frac{Cos.\left\{(c+1)\ Arctg.\,\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx =$

$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[(1-e^{-2smr})\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\right]$ (469), $\int_0^\infty Sin.2srx.\ Cot.rx\ \frac{Sin.\left\{(c+1)\ Arctg.\,\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,\frac{dx}{x} =$

$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m}(1-e^{-2smr})\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\right]$ (470), $\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cot.rx\ \frac{Cos.\left\{(c+1)\ Arctg.\,\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,xdx =$

$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{4}\ \frac{d^c}{dm^c}\ \left[m\,\frac{2\,e^{-2mr} - e^{-2smr} - e^{-(s+1)2mr}}{1-e^{-2mr}}\right]$ .... (471), $\int_0^\infty Sin.^2 srx.$

$Cot.rx\ \frac{Sin.\left\{(c+1)\ Arctg.\,\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{2\,e^{-2mr} - e^{-2smr} - e^{-(s+1)2mr}}{1-e^{-2mr}}\right]$ ... (472) [62];

$\int_0^\infty [1 - Cos.\,2srx + Sin.\,2srx.\ Cot.\,rx]\ \frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\ \frac{1 - e^{-2mr}\,Cos.\,2mr - e^{-2smr}\,Cos.\,2smr + e^{-(s+1)2mr}\,Cos.\left\{(s-1)2mr\right\} + e^{-2mr}\,Sin.\,2mr - e^{-2smr}\,Sin.\,2smr + e^{-(s+1)2mr}\,Sin.\left\{(s-1)2mr\right\}}{1 - 2\,e^{-2mr}\,Cos.\,2mr + e^{-4mr}}$

et $\int_0^\infty [1 - Cos.2srx + Sin.2srx.Cot.rx]\ \frac{x^2dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{2m}\ \frac{1 - e^{-2mr}\,Cos.\,2mr - e^{-2smr}\,Cos.\,2smr + e^{-(s+1)2mr}\,Cos.\left\{(s-1)2mr\right\} - e^{-2mr}\,Sin.\,2mr + e^{-2smr}\,Sin.\,2smr - e^{-(s+1)2mr}\,Sin.\left\{(s-1)2mr\right\}}{1 - 2\,e^{-2mr}\,Cos.\,2mr + e^{-4mr}}$,

---

[62] Parmi les facteurs des intégrales (469) et (472) on rencontre respectivement $Sin.\,2srx = 2\,Sin.\,srx.\ \ Cos.\,srx$ et $Sin.^2\,srx$: lorsque maintenant on divise la première par 2, les deux intégrales auront pour facteur commun $Sin.\,srx.\ Cot.\,rx$, et de plus elles seront ainsi constituées qu'elles peuvent se combiner par voie d'addition et de soustraction. On trouve:

$\int_0^\infty Sin.\,srx.\ Cot.\,rx\ \ \frac{Cos.\left\{srx \pm (c+1)\,Arctg.\,\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\ \frac{\pi}{4}\ \frac{d^c}{dm^c}\ (1) = 0$ ..... (473).

$\int_0^\infty Sin.\,srx.\ Cot.\,rx\ \frac{Cos.\left\{srx - (c+1)\,Arctg.\,\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\ dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1 + 3\,e^{-2mr} - 2\,e^{-2smr}\,(1+e^{-2mr})}{1-e^{-2mr}}\right]$

(474).

d'où par l'intermédiaire des formules citées (ψ) et (ω) (T. 207, N°. 5, 6) et des intégrales T. 20, N°. 5, 4 (pour $q=2$, $p=2m^2$) $\int_0^\infty \frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m^3}$ ... ($\alpha\lambda$), $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m}$ ... ($\alpha\mu$) [63] on déduit

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}\,2srx.\ \mathrm{Cot.}\,rx\ \frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m^3}\ \frac{1+2e^{-2mr}\,\mathrm{Sin.}\,2mr - e^{-4mr} - e^{-2smr}(1-e^{-4mr})(\mathrm{Cos.}\,2smr + \mathrm{Sin.}\,2smr) - 2e^{-(s+1)2mr}\,\mathrm{Sin.}\,2mr.\,(\mathrm{Cos.}\,2smr - \mathrm{Sin.}\,2smr)}{1-e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr + e^{-4mr}} \quad \ldots\ldots\ldots (475),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}\,2srx.\ \mathrm{Cot.}\,rx\,\frac{x^2dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m}\,\frac{1-2e^{-2mr}\,\mathrm{Sin.}\,2mr - e^{-4mr} - e^{-2smr}(1-e^{-4mr})(\mathrm{Cos.}\,2smr - \mathrm{Sin.}\,2smr) + 2e^{-(s+1)2mr}\,\mathrm{Sin.}\,2mr.(\mathrm{Cos.}\,2smr + \mathrm{Sin.}\,2smr)}{1-2e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr + e^{-4mr}} \quad (476);$$

ensuite

$$\int_0^\infty [-\mathrm{Sin.}\,2srx + (1-\mathrm{Cos.}\,2srx)\ \mathrm{Cot.}\,rx]\ \frac{xdx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{2m^2}\ \frac{e^{-2mr}\,\mathrm{Sin.}\,2mr - e^{-2smr}\,\mathrm{Sin.}\,2smr + e^{-(s+1)2mr}\,\mathrm{Sin.}\,\{(s-1)2mr\}}{1-2e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr + e^{-4mr}}$$

et

$$\int_0^\infty [-\mathrm{Sin.}\,2srx + (1-\mathrm{Cos.}\,2srx)\ \mathrm{Cot.}\,rx]\ \frac{x^3dx}{4m^4+x^4} = \pi\left[\frac{1-e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr - e^{-2smr}\,\mathrm{Cos.}\,2smr + e^{-(s+1)2mr}\,\mathrm{Cos.}\,\{(s-1)2mr\}}{1-2e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr + e^{-4mr}} - 1\right],$$

d'où par les intégrales ($\alpha\alpha$), ($\alpha\beta$), (T. 207, N°. 7, 8), et comme $1-\mathrm{Cos.}\,2srx = 2\,\mathrm{Sin.}^2 srx$:

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^2 srx.\ \mathrm{Cot.}\,rx\ \frac{xdx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m^2}\ \frac{2e^{-2mr}\,\mathrm{Sin.}\,2mr - e^{-2smr}(1-e^{-4mr})\,\mathrm{Sin.}\,2smr - 2e^{-(s+1)2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2smr.\ \mathrm{Sin.}\,2mr}{1-2e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr + e^{-4mr}} \quad \ldots (477),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}\,2srx.\ \mathrm{Cot.}\,rx\ \frac{x^3dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4}\ \frac{2e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr - 2e^{-4mr} - e^{-2smr}(1-e^{-4mr})\,\mathrm{Cos.}\,2smr + 2e^{-(s+1)2mr}\,\mathrm{Sin.}\,2smr.\ \mathrm{Sin.}\,2mr}{1-2e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr + e^{-4mr}} \quad \ldots (478);$$

puis $\int_0^\infty [1-\mathrm{Cos.}\,2srx + \mathrm{Sin.}\,2srx.\ \mathrm{Cot.}\,rx]\ Si.(x)\,\frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\{Ei.(-m) - Ei.(m)\}\,\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}$, ou par l'intégrale ($\alpha\gamma$) (T. 435, N°. 9):

---

[63] Remarquons que les deux dernières intégrales ne sont proprement que des cas spéciaux des premières par l'évanouissement de l'argument a du *Cosinus*; mais comme en général il n'est pas permis d'annuler quelque constante dans une intégrale définie, il a fallu déduire ces intégrales-là séparément: et nous avons choisi pour elles la forme des intégrales T. 20, N°. 5, 4 de Raabe, puisque cette orme se prête ici le plus aisément au calcul, vu que $\mathrm{Sin.}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} = \mathrm{Cos.}\,\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^\infty [1+Sin.2srx.\ Cot.rx]\ Si.(x)\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4}\left\{Ei.(-m)-Ei.(m)\right\}\frac{2-e^{-2smr}-e^{-(s+1)2mr}}{1-e^{-2mr}} \quad (479);$$

$$\int_0^\infty [1-Cos.2srx+Sin.2srx.\ Cot.rx]\ Ci.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}Ei.(-m)\left\{\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}+\right.$$

$+\left.\frac{1-e^{2smr}}{1-e^{2mr}}\right\}$, ou par l'intégrale $(\alpha\delta)$ (T. 435, N°. 5): $\int_0^\infty [1+Sin.2srx.\ Cot.rx]$

$$Ci.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4m}Ei.(-m)\frac{2-2e^{-2mr}+e^{2smr}+e^{(s-1)2mr}-e^{-2smr}-e^{-(s+1)2mr}}{1-e^{-2mr}} \quad (480);$$

$$\int_0^\infty [-Sin.2srx+(1-Cos.2srx)Cot.rx]\ Si.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\left\{Ei.(m)-Ei.(-m)\right\}\left\{\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}-1\right\},$$

ou à cause de l'intégrale $(\alpha\varepsilon)$ (T. 435, N°. 3): $\int_0^\infty (1-Cos.2srx)\ Cot.rx.\ Si.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=$

$$=2\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cot.rx.\ Si.(x)\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4m}\left\{Ei.(m)-Ei.(-m)\right\}\frac{2e^{-2mr}-e^{-2smr}-e^{-(s+1)2mr}}{1-e^{-2mr}} \quad (481);$$

$$\int_0^\infty [-Sin.2srx+(1-Cos.2srx)\ Cot.rx]\ Ci.(x)\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2}Ei.(-m)\left\{\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}-\frac{1-e^{2smr}}{1-e^{2mr}}\right\},$$

ou par l'intégrale $(\alpha\zeta)$ (T. 435, N°. 7): $\int_0^\infty (1-Cos.2srx)\ Cot.rx.\ Ci.(x)\frac{xdx}{m^2+x^2}=2\int_0^\infty Sin.^2 srx.$

$$Cot.rx.\ Ci.(x)\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4}Ei.(-m)\frac{2+2e^{-2mr}-e^{2smr}-e^{(s-1)2mr}-e^{-2smr}-e^{-(s+1)2mr}}{1-e^{-2mr}} \quad (482).$$

Quant aux théorèmes (XLVI) à (LIII), nous n'en avons pas fait usage, vu qu'ils ne donnent pas ici des résultats propres à être transformés.

Les deux équations (al) et (ai) donnent ici: $f(\alpha)=1$, $f(\alpha+\beta e^{\pm mr})=$

$$=\frac{1+e^{\pm(2s+1)mr}}{1+e^{\pm mr}},\ f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr})=\frac{1+e^{-(1-i)(2s+1)mr}}{1+e^{-(1-i)mr}}=\frac{[1+e^{-(2s+1)mr}Cos.\{(2s+1)mr\}+i\,e^{-(2s+1)mr}Sin.\{(2s+1)mr\}]\ (1+e^{-mr}Cos.mr-i\,e^{-mr}Sin.mr)}{(1+e^{-mr}Cos.mr)^2+(e^{-mr}Sin.mr)^2}=$$

$$=\frac{[1+e^{-mr}Cos.mr+e^{-(2s+1)mr}Cos.\{(2s+1)mr\}+e^{-(s+1)2mr}Cos.2smr]+i[-e^{-mr}Sin.mr+e^{-(2s+1)mr}Sin.\{(2s+1)mr\}+e^{-(s+1)2mr}Sin.2smr]}{1+2e^{-mr}Cos.mr+e^{-2mr}},$$ tandis

que pour obtenir $f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr})$ on n'a qu'à y changer le signe de i. A présent on trouvera, lorsqu'on double le r:

$\int_0^\infty [1+Cos.4srx-Sin.4srx.\ Tg.rx]\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{m}\frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}}$, $\int_0^\infty [Sin.4srx-$

$-(1-Cos.4srx)\ Tg.rx]\frac{xdx}{m^2+x^2}=\pi\left[\frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}}-1\right]$, formules qui se prêtent

à la même simplification par l'intermédiaire des mêmes intégrales $(\alpha\varkappa)$, (φ), (χ), et qui donnent après: $\int_0^\infty Sin.4srx.Tg.rx \frac{dx}{m^2+x^2} = -\frac{\pi}{2m}(1-e^{-4smr})\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}$ ... (483),

$$\int_0^\infty (1-Cos.4srx)\,Tg.rx \frac{dx}{m^2+x^2} = 2\int_0^\infty Sin.^2 2srx.Tg.rx \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{2e^{-2mr}+e^{-4smr}-e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}}$$ ... (484) [64]. Puis on trouve: $\int_0^\infty Sin.4srx.Tg.rx \frac{Cos.\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx =$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}[(1-e^{-4smr})\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}]$$ ... (487), $\int_0^\infty Sin.4srx.Tg.rx \frac{Sin.\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\frac{dx}{x} =$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}[\frac{1}{m}(1-e^{-4smr})\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}]$$ ... (488), $\int_0^\infty Sin.^2 2srx.Tg.rx \frac{Cos.\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}xdx =$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{4}\frac{d^c}{dm^c}[m\frac{2e^{-2mr}+e^{-4smr}-e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}}]$$ (489), $\int_0^\infty Sin.^2 2srx.Tg.rx \frac{Sin.\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx =$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{4}\frac{d^c}{dm^c}[\frac{2e^{-2mr}+e^{-4smr}-e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}}]$$ ..... (490) [65]. Encore a-t-on:

---

[64] Lorsqu'on prend la somme des intégrales (467) et (483), de (468) et (484), après avoir mis $2s$ au lieu de s dans les formules (467), (468), on peut réduire ensuite r à $\frac{1}{2}r$, et obtenir ainsi: $\int_0^\infty Sin.2srx.\ Cosec.rx \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m}\frac{1-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}}$ ... (485), $\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.rx \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}}$ ... (486).

[65] Sommons ces quatre intégrales respectivement avec les quatre précédentes (469) à (472) (après que nous aurons doublé dans celles-ci les constantes s) et nous aurons pour r au lieu de $2r$:

$$\int_0^\infty Sin.2srx.\ Cosec.rx \frac{Cos.\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\pi\frac{d^c}{dm^c}[\frac{1-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}}]$$ .... (491),

$$\int_0^\infty Sin.2srx.\ Cosec.rx \frac{Sin.\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\pi\frac{d^c}{dm^c}[\frac{1}{m}\frac{1-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}}]$$ .... (492),

$$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.rx \frac{Cos.\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}xdx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\frac{\pi}{2}\frac{d^c}{dm^c}[m\frac{1-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}}]$$ ...... (493),

$$\int_0^\infty [1+Cos.4srx - Sin.4srx.\,Tg.rx]\,\frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\,\frac{1+e^{-2mr}\,Cos.2mr + e^{-(2s+1)2mr}\,Cos.\{(2s+1)2mr\} + e^{-(s+1)4mr}\,Cos.4smr - e^{-2mr}\,Sin.2mr + e^{-(2s+1)2mr}\,Sin.\{(2s+1)2mr\} + e^{-(s+1)4mr}\,Sin.4smr}{1+2e^{-2mr}\,Cos.2mr + e^{-4mr}},$$

$$\int_0^\infty [1+Cos.4srx - Sin.4srx.\,Tg.rx]\,\frac{x^2dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{2m}\,\frac{1+e^{-2mr}\,Cos.2mr + e^{-(2s+1)2mr}\,Cos.\{(2s+1)2mr\} + e^{-(s+1)4mr}\,Cos.4smr + e^{-2mr}\,Sin.2mr - e^{-(2s+1)2mr}\,Sin.\{(2s+1)2mr\} - e^{-(s+1)4mr}\,Sin.4smr}{1+2e^{-2mr}\,Cos.2mr + e^{-4mr}},$$

$$\int_0^\infty [Sin.4srx - (1-Cos.4srx)\,Tg.rx]\,\frac{xdx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{2m^2}\,\frac{-e^{-2mr}\,Sin.2mr + e^{-(2s+1)2mr}\,Sin.\{(2s+1)2mr\} + e^{-(s+1)4mr}\,Sin.4smr}{1+2e^{-2mr}\,Cos.2mr + e^{-4mr}},$$

$$\int_0^\infty [Sin.4srx - (1-Cos.4srx)\,Tg.rx]\,\frac{x^3dx}{4m^4+x^4} = \pi\,\Big[\frac{1+e^{-2mr}\,Cos.2mr + e^{-(2s+1)2mr}\,Cos.\{(2s+1)2mr\} + e^{-(s+1)4mr}\,Cos.4smr}{1+2e^{-2mr}\,Cos.2mr + e^{-4mr}} - 1\Big],$$

d'où par l'emploi des mêmes intégrales $(\alpha\lambda)$, $(\alpha\mu)$, (ψ), (ω), $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, de plus haut:

$$\int_0^\infty Sin.4srx.Tg.rx\,\frac{dx}{4m^4+x^4} = -\frac{\pi}{8m^3}\,\frac{1-2e^{-2mr}\,Sin.2mr - e^{-4mr} + 2e^{-(2s+1)2mr}\,Sin.2mr.\,(Cos.4smr - Sin.4smr) - e^{-4smr}\,(1-e^{-4mr})\,(Cos.4smr + Sin.4smr)}{1+2e^{-2mr}\,Cos.2mr + e^{-4mr}} \;\ldots\; (497),$$

$$\int_0^\infty Sin.4srx.Tg.rx\,\frac{x^2dx}{4m^4+x^4} = -\frac{\pi}{4m}\,\frac{1+2e^{-2mr}\,Sin.2mr - e^{-4mr} - 2e^{-(2s+1)2mr}\,Sin.2mr.\,(Cos.4mr + Sin.4smr) - e^{-4smr}\,(1-e^{-4mr})\,(Cos.4smr - Sin.4smr)}{1+2e^{-2mr}\,Cos.2mr + e^{-4mr}} \;\ldots\; (498),$$

$$\int_0^\infty Sin^2 2srx.Tg.rx\,\frac{xdx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m}\,\frac{2e^{-2mr}\,Sin.2mr - 2e^{-(2s+1)2mr}\,Sin.2mr.\,Cos.4smr +}{1+2e^{-2mr}\,Cos.2mr +}$$

$$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\,Cosec.rx\,\frac{Sin.\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\,\Big[\frac{1-e^{-2mr}}{e^{mr}-e^{-mr}}\Big] \;\ldots\ldots\; (494).$$

La première et la dernière de ces intégrales, combinées par voie d'addition et de soustraction, donneront encore les résultats:

$$\int_0^\infty Sin.srx.\;Cosec.rx\,\frac{Cos.\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m} + srx\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = 0 \;\ldots\ldots\; (495),$$

$$\int_0^\infty Sin.srx.\;Cosec.rx\,\frac{Cos.\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m} - srx\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\,\pi\,\frac{d^c}{dm^c}\,\Big[\frac{1-e^{-2mr}}{e^{mr}-e^{-mr}}\Big] \;\ldots\ldots\; (496).$$

$$+\frac{e^{-4smr}\,(1-e^{-4mr})\ Sin.\,4smr}{+\,e^{-4mr}} \ \ldots\ldots\ (499),\quad \int_0^\infty Sin.^2\,2srx.\ Tg.\,rx\ \frac{x^2dx}{4m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\ \frac{2e^{-2mr}\ Cos\,2mr + 2e^{-4mr} + 2e^{-(2s+1)2mr}\ Sin.\,2mr.\ Sin.\,4smr + e^{-4smr}}{1+2e^{-2mr}\ Cos.\,2mr +}$$

$$\frac{(1-e^{-4mr})\ Cos.\,4smr}{+\,e^{-4mr}}\ \ldots\ldots\ (500)$$ [66]. Ensuite on trouve $\int_0^\infty [1+Cos.\,4srx -$

$$- Sin.\,4srx.\ Tg.\,rx]\ Si.(x)\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\ \frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}},\quad \int_0^\infty [1+Cos.\,4srx -$$

$$- Sin.\,4srx.\ Tg.\,rx]\ Ci.(x)\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Ei.(-m)\ \left\{\frac{1+e^{(2s+1)2mr}}{1+e^{2mr}} + \frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2m}\ Ei.(-m)\ \frac{1+e^{-2mr}+e^{4smr}+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}},\quad \int_0^\infty [Sin.\,4srx -$$

$$- (1-Cos.\,4srx)\ Tg.\,rx]\ Si.(x)\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\,\{Ei.(-m) - Ei.(m)\}\ \left[\frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}} - 1\right],$$

$$\int_0^\infty [Sin.\,4srx - (1-Cos.\,4srx)\ Tg.\,rx]\ Ci.(x)\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\ Ei.(-m)\ \left\{\frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}} -\right.$$

$$\left.-\frac{1+e^{(2s+1)2mr}}{1+e^{2mr}}\right\} = \frac{\pi}{4}\ Ei.(-m)\ \frac{1-e^{-2mr}-e^{4smr}+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}}.$$ Mais de la même manière que plus haut et à l'aide des mêmes intégrales $(\alpha\gamma)$, $(\alpha\delta)$, $(\alpha\varepsilon)$, $(\alpha\zeta)$, on en déduit ici:

[66] Quand on prend $2s$ au lieu de s dans les intégrales (475) à (478), et qu'on les ajoute à ces quatre dernières respectivement, on peut réduire $2r$ à sa valeur primitive r, et l'on aura:

$$\int_0^\infty Sin.\,2srx.\,Cosec.\,rx\,\frac{dx}{4m^2+x^2} = \frac{\pi}{4m^2}\ \frac{(e^{mr}+e^{-mr})Sin.\,mr + (e^{mr}-e^{-mr})Cos.\,mr + e^{-(2s+1)mr}[Cos.\,\{(2s-1)mr\} +}{e^{2mr} - 2\,Cos.\,2mr +}$$

$$\frac{+\ Sin.\,\{(2s-1)mr\}] - e^{-(2s-1)mr}\ [Sin.\,\{(2s+1)mr\} + Cos.\,\{(2s+1)mr\}]}{+\ e^{-2mr}}\ \ldots\ldots\ (501),$$

$$\int_0^\infty Sin.\,2srx.\,Cosec.\,rx\,\frac{x^2dx}{4m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\ \frac{(e^{mr}-e^{-mr})Cos.\,mr - (e^{mr}+e^{-mr})Sin.\,mr + e^{-(2s+1)mr}[Cos.\,\{(2s-1)mr\} -}{e^{2mr} - 2\,Cos.\,2mr +}$$

$$\frac{-\ Sin.\,\{(2s-1)mr\}] - e^{-(2s-1)mr}\ [Cos.\,\{(2s+1)mr\} - Sin.\,\{(2s+1)mr\}]}{+\ e^{-2mr}}\ \ldots\ldots\ (502),$$

$$\int_0^\infty Sin.^2\,srx.\ Cosec.\,rx\ \frac{xdx}{4m^2+x^2} = \frac{\pi}{4m^2}\ \frac{(e^{mr}+e^{-mr})\ Sin.\,mr - e^{-(2s-1)mr}\ Sin.\,\{(2s+1)mr\} +}{e^{2mr} - 2\,Cos.\,2mr +}$$

$$\frac{+\ e^{-(2s+1)mr}\ Sin.\,\{(2s-1)mr\}}{+\ e^{-2mr}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (503),$$

$$\int_0^\infty Sin.^2\,srx.\ Cosec.\,rx\ \frac{x^2dx}{4m^2+x^2} = \pi\ \frac{(e^{mr}-e^{-mr})\ Cos.\,mr - e^{-(2s-1)mr}\ Cos.\,\{(2s+1)mr\} +}{e^{2mr} - 2\,Cos.\,2mr +}$$

$$\frac{+\ e^{-(2s+1)mr}\ Cos.\,\{(2s-1)mr\}}{+\ e^{-2mr}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (504).$$

$$\int_0^\infty [1-Sin.\,4srx.\ Tg.\,rx]\, Si.(x)\, \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\,\{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\, \frac{2-e^{-4smr}+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}} \quad (505),$$

$$\int_0^\infty [1-Sin.\,4srx.\ Tg.\,rx]\, Ci.(x)\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4m}\, Ei.(-m)\, \frac{2+2\,e^{-2mr}+e^{4smr}-e^{(2s-1)2mr}-e^{-4smr}+}{1+}$$

$$\frac{+\,e^{-(2s+1)2mr}}{+\,e^{-2mr}} \ \ldots\ (506),\ \int_0^\infty Sin.^2 2srx.\ Tg.\,rx.\ Si.(x)\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{8m}\,\{Ei.(m)-Ei.(-m)\}$$

$$\frac{2e^{-2mr}+e^{-4smr}-e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}} \ (507),\ \int_0^\infty Sin.^2 2srx.\ Tg.rx.\ Ci.(x)\, \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{8}\, Ei.(-m)\, \frac{-2+2e^{-2mr}-}{1+}$$

$$\frac{-\,e^{(2s-1)2mr}+e^{4smr}+e^{-4smr}-e^{-(2s+1)2mr}}{+\,e^{-2mr}} \ \ldots\ (508)\ [67].$$

Pour les deux autres équations générales (ah) et (al) on a ici $f(\alpha)=1$, $f(\alpha+\beta e^{\pm mr})=$
$= \dfrac{1-q^s e^{\pm smr}}{1-q\,e^{\pm mr}}$, $f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr}) = \dfrac{1-q^s e^{-(1-i)smr}}{1-q\,e^{-(1-i)mr}} = \dfrac{1-q^s e^{-smr}(Cos.\,smr+i\,Sin.\,smr)}{1-qe^{-mr}(Cos.\,mr+iSin.\,mr)} =$

$$= \frac{[1-q\,e^{-mr}\ Cos.\,mr - q^s\,e^{-smr}\ Cos.\,smr + q^{s+1}\,e^{-(s+1)mr}\ Cos.\{(s-1)\,mr\}] +}{1-2\,q\,e^{-mr}\ Cos.\,2mr +}$$

$$\frac{+\ i\,[q\,e^{-mr}\ Sin.\,mr - q^s\,e^{-smr}\ Sin.\,smr + q^{s+1}\,e^{-(s+1)mr}\ Sin.\{(s-1)mr\}]}{+\ q^2\,e^{-2mr}};$$

dont en même temps on déduit $f(\alpha+\beta\,e^{-(1+i)mr})$ en y changeant seulement le signe de i. Eu égard à ces réductions, les théorèmes à employer nous donneront pour $q^2<1$:

$$\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.\,rx - q^s\,Cos.\,srx + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\ \frac{1-q^s\,e^{-smr}}{1-q\,e^{-mr}},$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx - q^{s-1}\ Sin.\,srx + q^s\,Sin.\{(s-1)\,rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ \frac{e^{-mr}-q^{s-1}\,e^{-smr}}{1-q\,e^{-mr}}.$$

Mais comme les intégrales T. 221, N°. 6, 7 donnent après la substitution de q, rx, mr respectivement au lieu de p, x, q, $\int_0^\infty \frac{1}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2} =$

[67] En retranchant les intégrales (505), (506) des intégrales précédentes (479), (480), après avoir préalablement changé dans celles-ci s en $2s$, nous pourrons de nouveau prendre $\frac{1}{2}r$ au lieu de r, et nous aurons ainsi:

$$\int_0^\infty Sin.\,2srx.\ Cosec.\,rx.\ Si.(x)\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ \{Ei.(-m)-Ei.(m)\}\ \frac{1-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}} \ \ldots\ldots\ (509),$$

$$\int_0^\infty Sin.\,2srx.\ Cosec.\,rx.\ Ci.(x)\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Ei.(-m)\ \frac{e^{2smr}-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}} \ \ldots\ (510).$$

Lorsque au contraire on fait $s=2s$ dans les intégrales (481), (482), et qu'ensuite on les ajoute aux intégrales dans le texte (507), (508), on obtient, pour r au lieu de $2r$:

$$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.\,rx.\ Si.(x)\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\ \{Ei.(m)-Ei.(-m)\}\ \frac{1-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}} \ \ldots\ldots\ (511),$$

$$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.\,rx.\ Ci.(x)\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ Ei.(-m)\ \frac{2-(e^{2smr}+e^{-2smr})\,e^{-2mr}}{e^{mr}-e^{-mr}} \ \ldots\ldots\ (512).$$

$= \frac{\pi}{2m} \frac{1}{1-q^2} \frac{1+q\,e^{-mr}}{1-q\,e^{-mr}}$ ..... $(\alpha\nu)$, $\int_0^\infty \frac{Cos.\,rx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{dx}{m^2+x^2} =$
$= \frac{\pi}{m} \frac{1}{1-q^2} \frac{q+e^{-mr}}{1-q\,e^{-mr}}$ ... $(\alpha\xi)$, et que l'on a de même par T. 221, N°. 9:
$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-mr}}{1-q\,e^{-mr}}$ ... (αo), on peut en profiter pour simplifier les intégrales trouvées, et l'on aura:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx - q\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} \frac{e^{-smr}}{1-q\,e^{-mr}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (513),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx - q\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-smr}}{1-q\,e^{-mr}} \quad \ldots\ (514)\ [68].$$

Ensuite il vient par les théorèmes suivants:

---

[68] Pour $s=1$ ces deux intégrales donnent: $\int_0^\infty \frac{Cos.\,rx-q}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} \frac{e^{-mr}}{1-q\,e^{-mr}}$ (T. 221, N°. 17) et $\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-mr}}{1-q\,e^{-mr}}$, l'intégrale T. 221, N°. 9, qu'on vient d'employer. Pour $s=2$ il vient à l'aide des formules $(\alpha\nu)$, $(\alpha\xi)$, $\int_0^\infty \frac{Cos.\,2rx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{dx}{m^2+x^2} =$ $= \frac{\pi}{2m} \frac{1}{1-q^2} \frac{e^{-2mr}+q\,e^{-mr}+q^2\,(1-e^{-2mr})}{1-q\,e^{-mr}}$ ... (515). Mais pour exprimer généralement l'intégrale $I(s) = \int_0^\infty \frac{Cos.\,srx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{dx}{m^2+x^2}$, il faut prendre une autre voie. A cet effet remarquons, que pour $A = \frac{\pi}{2m} \frac{1}{1-q\,e^{-mr}}$, on a par la formule (513), que l'on peut regarder ici comme une équation de réduction, $I(s)-q\,I(s-1) = Ae^{-smr}$; car alors on trouve successivement: $I(1) = Ae^{-mr} + q\,I(0)$, $I(2) = Ae^{-2mr} + q\,I(1) = A(e^{-2mr}+qe^{-mr}) + q\ \ I(0)$, $I(3) = Ae^{-3mr} + qI(2) = A(e^{-3mr} + q\,e^{-2mr} + q^2\,e^{-mr}) + q^3\,I(0)$, etc. Donc puisque $I(0) = A\frac{1+q\,e^{-mr}}{1-q^2}$, on en déduit $I(s) =$ $= A\left[q^s \frac{1+q\,e^{-mr}}{1-q^2} + e^{-smr} \frac{1-(q\,e^{mr})^s}{1-q\,e^{mr}}\right] = A\left[\frac{e^{-smr}}{1-q\,e^{mr}} + q^s \frac{q\,e^{-mr}-q\,e^{mr}}{(1-q^2)\,(1-q\,e^{mr})}\right]$, ou bien

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} \frac{1}{(1-q\,e^{-mr})(1-q\,e^{mr})} \left\{e^{-smr} - \frac{q^{s+1}}{1-q^2}(e^{mr}-e^{-mr})\right\} \ (516).$$

De même pour $s=2$, l'intégrale (514) donne à l'aide de T. 221, N°. 9, déduite au commencement de cette Note, $\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-2mr}+q\,e^{-mr}}{1-q\,e^{-mr}}$ (517), de sorte qu'ici la formation de l'intégrale générale est tout de suite apparente, et qu'on a $\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2} \frac{xdx}{m^2+x^2} =$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx - q\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\Big[\frac{e^{-smr}}{1-q\,e^{-mr}}\Big] \ldots (523),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx - q\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\Big[\frac{1}{m}\,\frac{e^{-smr}}{1-q\,e^{-mr}}\Big]\ (524),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx - q\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,xdx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\Big[\frac{m\,e^{-smr}}{1-q\,e^{-mr}}\Big]\ (525),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx - q\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\Big[\frac{e^{-smr}}{1-q\,e^{-mr}}\Big] (526)\,[69].$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-smr}+q\,e^{-(s-1)mr}+\ldots+q^{s-1}e^{-mr}}{1-q\,e^{-mr}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-smr}}{1-q\,e^{-mr}}\,\frac{1-(q\,e^{mr})^s}{1-q\,e^{mr}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-smr}-q^s}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})}\ (518).$$

Prenons dans les intégrales (516), (518) successivement $s+t$ et $s-t$ au lieu de s et combinons les résultats respectifs par voie d'addition et de soustraction, alors nous trouvons:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx.\ \ Cos.\,trx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4m}\,\frac{1}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})}\,\Big\{e^{-smr}\,(e^{tmr}+e^{-tmr}) -$$

$$- \frac{q^{s+1}}{1-q^2}\,(q^t+q^{-t})\,(e^{mr}-e^{-mr})\Big\}\ \ldots\ldots\ (519),\quad \int_0^\infty \frac{Sin.\,srx.\ Sin.\,trx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4m}\,\frac{1}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})}\,\Big\{\frac{q^{s+1}}{1-q^2}\,(q^t-q^{-t})\,(e^{mr}-e^{-mr}) - e^{-smr}\,(e^{tmr}-e^{-tmr})\Big\}\ \ldots\ (520),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx.\ Cos.\,trx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})}\,\Big\{e^{-smr}(e^{tmr}+e^{-tmr}) - q^s(q^t+q^{-t})\Big\}\ (s>t)\ (521), =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{(1-q\,e^{-mr})(1-q\,e^{mr})}\,\Big\{e^{-tmr}\,(e^{smr}-e^{-smr}) + q^t\,(q^s-q^{-s})\Big\}\ (s<t)\ (522)$$

Or, ces résultats justifient entièrement mon assertion sur les intégrales T. 221, N°. 18, 19, 1 à 4, et en outre par le changement du signe de q, le jugement porté sur les intégrales T. 220, N°. 8, 9, T. 222, N°. 13, 14; où pour ces dernières il fallait prendre dans nos intégrales $q=1$ et $q=-1$.

[69] Par le procédé employé dans la Note précédente on pourrait déduire de ces intégrales d'autres plus simples. Mais nous viendrons au but bien plus vite, en appliquant les théorèmes (XXII) à (XXV) à nos intégrales (516), (518); ainsi nous trouverons:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d^c}{dm^c}\Big[\frac{1}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})}\,\Big\{e^{-smr} -$$

$$- \frac{q^{s+1}}{1-q^2}\,(e^{mr}-e^{-mr})\Big\}\Big]\ \ldots\ (527),\quad \int_0^\infty \frac{Cos.\,srx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,\frac{dx}{x} =$$

Encore a-t-on

$$\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.\,rx - q^s\,Cos.\,srx + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\;\frac{dx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{8m^3}\;\frac{1-q\,e^{-mr}(Cos.\,mr - Sin.\,mr) - q^s\,e^{-smr}(Cos.\,smr + Sin.\,smr) + q^{s+1}\,e^{-(s+1)mr}[Cos.\{(s-1)mr\} + Sin.\{(s-1)mr\}]}{1-2q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2\,e^{-2mr}},$$

$$\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.\,rx - q^s\,Cos.\,srx + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\;\frac{x^2dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m}\;\frac{1-q\,e^{-mr}(Cos.\,mr + Sin.\,mr) - q^s\,e^{-smr}(Cos.\,smr - Sin.\,smr) + q^{s+1}\,e^{-(s+1)mr}[Cos.\{(s-1)mr\} - Sin.\{(s-1)mr\}]}{1-2q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2\,e^{-2mr}},$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx - q^{s-1}\,Sin.\,srx + q^s\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\;\frac{xdx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\;\frac{e^{-mr}\,Sin.\,mr - q^{s-1}\,e^{-smr}\,Sin.\,smr + q^s\,e^{-(s+1)mr}\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2\,e^{-2mr}},$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx - q^{s-1}\,Sin.\,srx + q^s\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\;\frac{x^3dx}{4m^4+x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2q}\left[\frac{1-q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr - q^s\,e^{-smr}\,Cos.\,smr + q^{s+1}\,e^{-(s+1)mr}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2\,e^{-2mr}} - 1\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\;\frac{e^{-mr}\,Cos.\,mr - q\,e^{-2mr} - q^{s-1}\,e^{-smr}\,Cos.\,smr + q^s\,e^{-(s+1)mr}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2\,e^{-2mr}}.$$

Mais les intégrales T. 222, N°. 2, 3 [70] nous donnent pour r, $m\sqrt{2}$, $\frac{1}{4}\pi$, au lieu de a, q, λ, et pour $-q$ ou $+q$ respectivement au lieu de p (comme alors $q\,Cos.\,\lambda = m = q\,Sin.\,\lambda$) les valeurs suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,rx - q}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\;\frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m^3}\;\frac{e^{-mr}(Cos.\,mr + Sin.\,mr - q\,e^{-mr})}{1-2q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2\,e^{-2mr}} \;\ldots\; (\alpha\alpha),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\;\frac{xdx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\;\frac{e^{-mr}\,Sin.\,mr}{1-2q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2\,e^{-2mr}} \;\ldots\; (\alpha\beta): \text{ et}$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\;\frac{\pi}{2}\;\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{1}{m(1-q\,e^{-mr})(1-q\,e^{mr})}\left\{e^{-smr} - \frac{q^{s+1}}{1-q^2}(e^{mr}-e^{-mr})\right\}\right] \;\ldots\ldots\; (528),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,srx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\;\frac{Cos.\left\{(c+1)\,Arctg.\,\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,xdx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\;\frac{\pi}{2}\;\frac{d^c}{dm^c}\left[m\,\frac{e^{-smr}-q^s}{(1-qe^{-mr})(1-qe^{mr})}\right] \;\ldots\; (529),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\;\frac{Sin.\left\{(c+1)\,Arctg.\,\frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\,dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}}\;\frac{\pi}{2}\;\frac{d^c}{dm^c}\left[\frac{e^{-smr}-q^s}{(1-q\,e^{-mr})(1-q\,e^{mr})}\right] \;\ldots\; (530).$$

[70] Ces intégrales se trouvent déduites par PLANA dans les Mémoires de Turin, 1818. T. 7, Part. II, p. 10.

nous pouvons y ajouter les intégrales analogues, qui se déduisent par une méthode absolument identique: $\int_0^\infty \frac{Cos.\,rx - q}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{x^2dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m}\,\frac{e^{-mr}\,(Cos.\,mr - Sin.\,mr - qe^{-mr})}{1 - 2qe^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}}$ $(\alpha\sigma)$, $\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx}{1 - 2q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{x^3dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-mr}\,Cos.\,mr}{1 - 2qe^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}}$ $(\alpha\tau)$. Quant à la première $(\alpha\pi)$ et à la troisième $(\alpha\upsilon)$ de ces intégrales, sous cette forme-là elles ne sont pas du tout propres à nous aider dans la réduction de nos intégrales: pour les approprier à ce but, il faut d'abord les multiplier par q et puis il faut ajouter à ces produits les intégrales que nous avons citées dans les formules $(\alpha\lambda)$, $(\alpha\mu)$. Ainsi nous aurons: $\int_0^\infty \frac{1 - q\,Cos.\,rx}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{8m^3}\,\frac{1 - q\,e^{-mr}\,(Cos.\,mr - Sin.\,mr)}{1 - 2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}}$ $(\alpha\nu)$, $\int_0^\infty \frac{1 - q\,Cos.\,rx}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{x^2dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m}\,\frac{1 - q\,e^{-mr}\,(Cos.\,mr + Sin.\,mr)}{1 - 2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}}$ $(\alpha\varphi)$. Dès-lors nos intégrales primitives se prêtent à une simplification, comme nous en avons souvent appliqué dans ce Numéro, c'est-à-dire, à une telle où les parties suivant les formules précédentes leur sont ôtées; et ainsi elles donnent:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx - q\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{8m^3}\,\frac{e^{-smr}\,(Cos.\,smr + Sin.\,smr) - q\,e^{-(s+1)mr}\,[Cos.\{(s-1)mr\} + Sin.\{(s-1)mr\}]}{1 - 2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}} \;\ldots\; (531),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx - q\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{x^2dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m}\,\frac{e^{-smr}\,(Cos.\,smr - Sin.\,smr) + q\,e^{-(s+1)mr}\,[Cos.\{(s-1)mr\} - Sin.\{(s-1)mr\}]}{1 - 2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}} \quad (532),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx - q\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{xdx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\,\frac{e^{-smr}\,Sin.\,smr - q\,e^{-(s+1)mr}\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1 - 2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}} \quad (533),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx - q\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1 - 2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{x^3dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2q^s}\,\frac{q^2\,e^{-2mr} + q^s\,e^{-smr}\,Cos.\,smr - q^{s+1}\,e^{-(s+1)mr}\,Cos.\{(s-1)\,mr\}}{1 - 2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2\,e^{-2mr}} \;\ldots\ldots\ldots\; (534)\ [71].$$

Enfin on trouve:

---

[71] Pour $s = 1$ ces quatre intégrales, qui peuvent être regardées comme des formules de réduction, deviennent:

$\int_0^\infty \frac{Cos.\,rx - q}{1 - 2q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{8m^3}\,\frac{e^{-mr}(Cos.\,mr + Sin.\,mr) - qe^{-2mr}}{1 - 2qe^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}}$, $\int_0^\infty \frac{Cos.\,rx - q}{1 - 2q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{x^2dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m}\,\frac{e^{-mr}(Cos.\,mr - Sin.\,mr) - qe^{-2mr}}{1 - 2qe^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}}$, $\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx}{1 - 2q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\,\frac{e^{-mr}\,Sin.\,mr}{1 - 2qe^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}}$, $\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,rx}{1 - 2q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{x^3dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2}\,\frac{q^2\,e^{-2mr} + q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr - q^2\,e^{-2mr}}{1 - 2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + q^2e^{-2mr}}$, qui coïncident toutes

$$\int_0^\infty \frac{1 - q\, Cos.\, rx - q^s\, Cos.\, rx + q^{s+1}\, Cos.\{(s-1)\, rx\}}{1 - 2\, q\, Cos.\, rx + q^2}\; Si.(x)\; \frac{xdx}{m^2 + x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\; \{Ei.(-m) - Ei.(m)\}\; \frac{1 - q^s\, e^{-smr}}{1 - q\, e^{-mr}} \;\ldots\; (545),\quad \int_0^\infty \frac{1 - q\, Cos.\, rx - q^s\, Cos.\, srx +}{1 - 2\, q\, Cos.\, rx +}$$

---

avec les intégrales $(\alpha\pi)$, $(\alpha\sigma)$, $(\alpha\varphi)$, $(\alpha\tau)$. Maintenant faisons $s = 2$ dans les intégrales (533), (534), nous aurons:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.2rx - qSin.rx}{1 - 2qCos.rx + q^2}\, \frac{xdx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\, \frac{e^{-2mr}Sin.2mr - qe^{-3mr}Sin.mr}{1 - 2qe^{-mr}\, Cos.mr + q^2 e^{-2mr}},\; \int_0^\infty \frac{q^2\, Sin.2rx - q^3\, Sin.rx}{1 - 2qCos.rx + q^2}\, \frac{x^3dx}{4m^4 + x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{q^2 e^{-2mr} + q^2 e^{-2mr}\, Cos.\, 2mr - q^3 e^{-3mr}\, Cos.\, mr}{1 - 2qe^{-mr}\, Cos.\, mr + q^2 e^{-2mr}}.$$ Ajoutons-y les intégrales analogues à numérateur monôme, que l'on vient de retrouver, multipliées auparavant par q et par q^2 respectivement, et nous obtiendrons:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, 2rx}{1 - 2\, q\, Cos.\, rx + q^2}\; \frac{xdx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\; \frac{e^{-2mr}\; Sin.\, 2mr + q\,(1 - e^{-2mr})\; e^{-mr}\; Sin.\, mr}{1 - 2\, q\, e^{-mr}\; Cos.\, mr + q^2\, e^{-2mr}} \;\ldots\; (535),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, 2rx}{1 - 2\, q\, Cos.\, rx + q^2}\; \frac{x^3dx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{2}\; \frac{e^{-2mr} + e^{-2mr}\, Cos.\, 2mr + q\,(1 - e^{-2mr})\, e^{-mr}\, Cos.\, mr}{1 - 2\, q\, e^{-mr}\, Cos.\, mr + q^2 e^{-2mr}} \;\ldots\; (536).$$

De la même manière, vu que la loi de génération soit assez simple, nous aurons pour formules générales:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, srx}{1 - 2\, q\, Cos.\, rx + q^2}\; \frac{xdx}{4\, m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\; \frac{1}{1 - 2\, q\, e^{-mr}\; Cos.\, mr + q^2\; e^{-2mr}}\; \Big\{ e^{-smr}\; Sin.\, smr + $$

$$+ (1 - e^{-2mr})\; q^s\; \sum_1^{s-1} q^{-n}\; e^{-nmr}\; Sin.\, nmr \Big\},\quad \int_0^\infty \frac{Sin.\, srx}{1 - 2\; q\; Cos.\; rx + q^2}\; \frac{x^3 dx}{4\, m^4 + x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\; \frac{1}{1 - 2qe^{-mr}\, Cos.mr + q^2\, e^{-2mr}}\; \Big\{ e^{-smr} \sum_0^{s-2} q^n + e^{-smr}\, Cos.smr + (1 - e^{-2mr})\, q^s \sum_1^{s-1} q^{-n} e^{-nmr}\, Cos.nmr \Big\}.$$

Or, les deux sommations peuvent être transformées de la manière suivante. Soit $A = \sum_0^{s-1} q^{-n} e^{-nmr} Sin.nmr$, $B =$ $= \sum_0^{s-1} q^{-n}\, e^{-nmr}\; Cos.\, nmr$; alors $B \pm i\, A = \sum_0^{s-1} q^{-n}\, e^{-nmr}\; e^{\pm nmri} = \sum_0^{s-1} (q^{-1}\; e^{-(1 \mp i)mr})^n =$

$$= \frac{1 - (q^{-1}\, e^{-mr(1 \mp i)})^s}{1 - q^{-1}\, e^{-mr(1 \mp i)}} = q^{1-s}\; \frac{q^s - e^{-smr}\,(Cos.\, smr \pm i Sin.\, smr)}{q - e^{-mr}\,(Cos.\, mr \pm i\, Sin.\, mr)} = q^{1-s}\; \frac{[q^{s+1} - q^s e^{-mr}\; Cos.\, mr - q\, e^{-smr}\; Cos.\; smr + e^{-(s+1)mr}\; Cos.\{(s-1)\, mr\}] \pm i\, [q^s\, e^{-mr}\; Sin.\; mr - q\, e^{-smr}\; Sin.\; smr + e^{-(s+1)mr}\; Sin.\{(s-1)\, mr\}]}{q^2 - 2\, q\, e^{-mr}\; Cos.\, mr + e^{-2mr}},$$

d'où l'on retourne aux formules remarquables

$$A = q^{1-s}\; \frac{q^s\, e^{-mr}\; Sin.\; mr - q\; e^{-smr}\; Sin.\; smr + e^{-(s+1)mr}\; Sin.\{(s-1)\, mr\}}{q^2 - 2\; q\; e^{-mr}\; Cos.\; mr + e^{-2mr}} \;\ldots\ldots\; (\alpha\chi),$$

$$B = q^{1-s}\; \frac{q^{s+1} - q^s\, e^{-mr}\; Cos.\; mr - q\; e^{-smr}\; Cos.\; smr + e^{-(s+1)mr}\; Cos.\{(s-1)mr\}}{q^2 - 2\; q\; e^{-mr}\; Cos.\; mr + e^{-2mr}} \;\ldots\; (\alpha\psi).$$ Maintenant on a successivement $\int_0^\infty \frac{Sin.\, srx}{1 - 2qCos.rx + q^2}\, \frac{xdx}{4m^4 + x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\, \frac{1}{1 - 2qe^{-mr}\, Cos.\, mr + q^2 e^{-2mr}} \Big\{ e^{-smr}$

$$\frac{+\ q^{s+1}\ Cos.\left\{(s-1)rx\right\}}{+\ q^2}\ Ci.(x)\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4}\ Ei.(-m)\left\{\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}}+\frac{1-q^s e^{smr}}{1-q e^{mr}}\right\}\ \dots\ (516),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\ rx\ -\ q^{s-1}\ Sin.\ srx\ +\ q^s\ Sin.\left\{(s-1)rx\right\}}{1-2\ Cos.\ rx+q^2}\ Si.(x)\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{4qm}\ \left\{Ei.(m)\ -\right.$$

$$Sin.\ smr+(1-e^{-2mr})q^s(A-0)\Big\}=\frac{\pi}{4m^2}\ \frac{q^{s+1}(1-e^{-2mr})\ e^{-mr}\ Sin.\ mr-q\ e^{-(s+1)mr}\ Sin.\left\{(s+1)mr\right\}\ +}{(1-2\,q\,e^{-mr}\ Cos.\ mr+q^2\ e^{-2mr})}$$

$$\frac{+\ (1+q^2)\ e^{-(s+2)mr}\ Sin.\ smr\ -\ q\ e^{-(s+3)mr}\ Sin.\left\{(s-1)\ mr\right\}}{(q^2-2\ q\ e^{-mr}\ Cos.\ mr+e^{-2mr})}\ \dots\dots\dots\dots\ (537),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\ srx}{1-2\,q Cos.\ rx+q^2}\ \frac{x^3dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{2}\ \frac{1}{1-2\,q\,e^{-mr}\ Cos.\ mr+q^2\ e^{-2mr}}\left\{e^{-mr}\ \frac{1-q^{s-1}}{1-q}+e^{-smr}\ Cos.\ smr\ +\right.$$

$$\left.+\ (1-e^{-2mr})\ q^s\ (B-1)\right\}\ =\ \frac{\pi}{2}\ \frac{1}{1-2\ q\ e^{-mr}\ Cos.\ mr\ +\ q^2\ e^{-2mr}}\ \left\{e^{-mr}\ \frac{1-q^{s-1}}{1-q}\ +\right.$$

$$+\ \frac{(q^{s+1}\ e^{-mr}\ Cos.\ mr\ -\ q^s\ e^{-2mr})\ (1-e^{-2mr})\ -\ q\ e^{-(s+1)mr}\ Cos.\left\{(s+1)\ mr\right\}\ +}{q^2\ -\ 2\ q\ e^{-mr}\ Cos.\ mr\ +}$$

$$\frac{+\ (1+q^2)\ e^{-(s+2)mr}\ Cos.\ smr\ -\ q\ e^{-(s+3)mr}\ Cos.\left\{(s-1)\,mr\right\}}{+\ e^{-2mr}}\ \dots\ (538).$$

Pour déduire des résultats analogues des deux autres intégrales (531) et (532), il convient de séparer d'abord les deux termes dans le numérateur des formules (αv), (αq). A cet effet ajoutons-les aux produits des intégrales ($\alpha\pi$), ($\alpha\sigma$) par q: puis multiplions-les par q et ajoutons à ces produits les intégrales ($\alpha\pi$), ($\alpha\sigma$). Ainsi nous obtiendrons:



$$\int_0^\infty \frac{1}{1-2\,q\ Cos.\ rx+q^2}\ \frac{dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{8m^3}\ \frac{1}{1-q^2}\ \frac{1+2\,q\,e^{-mr}\ Sin.\ mr-q^2\ e^{-2mr}}{1-2\,q\,e^{-mr}\ Cos.\ mr+q^2\ e^{-2mr}}\ \dots\ (539)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1-2\,q\ Cos.\ rx+q^2}\ \frac{x^2dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{4m}\ \frac{1}{1-q^2}\ \frac{1-2\,q\,e^{-mr}\ Sin.\ mr-q^2\ e^{-2mr}}{1-2\,q\,e^{-mr}\ Cos.\ mr+q^2\ e^{-2mr}}\ \dots\ (540),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\ rx}{1-2\,q\ Cos.\ rx+q^2}\ \frac{dx}{4m^4+x^4}=\frac{\pi}{8m^3}\ \frac{1}{1-q^2}\ \frac{q(1-e^{-2mr})\ +\ (1-q^2)\ e^{-mr}\ Cos.\ mr\ +}{1-2\,q\,e^{-mr}\ Cos.\ mr\ +}$$

$$\frac{+\ (1+q^2)\ e^{-mr}\ Sin.\ mr}{+\ q^2\ e^{-2mr}}\ \dots\ (541)\ =\ \frac{\pi}{8m^3}\ \frac{e^{-mr}\ (Cos.\ mr\ +\ Sin.\ mr)\ -\ q\ e^{-2mr}\ +}{1-2\,q\,e^{-mr}\ Cos.\ mr\ +}$$

$$\frac{+\ \frac{q}{1-q^2}\ (1+2\ q\ e^{-mr}\ Sin.\ mr\ -\ q^2\ e^{-2mr})}{+\ q^2\ e^{-2mr}},\quad \int_0^\infty \frac{Cos.\ rx}{1-2\ q\ Cos.\ rx+q^2}\ \frac{x^2dx}{4m^4+x^4}\ =$$

$$=\frac{\pi}{4m}\ \frac{1}{1-q^2}\ \frac{q(1-e^{-2mr})+(1-q^2)\ e^{-mr}\ Cos.\ mr-(1+q^2)\ e^{-mr}\ Sin.\ mr}{1-2\,q\,e^{-mr}\ Cos.\ mr+q^2\ e^{-2mr}}\ \dots\ (542)\ =$$

$$=\frac{\pi}{4m}\ \frac{e^{-mr}\ (Cos.\ mr-Sin.\ mr)-q\,e^{-2mr}+\frac{q}{1-q^2}\ (1-2\,q\,e^{-mr}\ Sin.\ mr-q^2\ e^{-2mr})}{1-2\,q\,e^{-mr}\ Cos.\ mr+q^2\ e^{-2mr}}.$$

Les dernières valeurs, quoique moins simples, nous les avons ajoutées, pour mieux montrer la forme, qui résulte des formules de réduction (531), (532). En effet celles-ci mènent définitivement aux formules générales

$$- Ei.(-m) \Big\} \Big\{ \frac{1-q_s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}} - 1 \Big\} \quad (547), \quad \int_0^\infty \frac{Sin. rx - q^{s-1} Sin. srx + q^s Sin. \{(s-1)rx\}}{1-2q\, Cos. rx + q^2} Ci.(x) \frac{x\,dx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} Ei.(-m) \frac{e^{-mr} - e^{mr} + q^{s-1}(e^{smr} - e^{-smr}) + q^s (e^{(1-s)mr} - e^{(s-1)mr})}{1-q(e^{mr}+e^{-mr})+q^2} \;\ldots\ldots\; (548),$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - q\, Cos. rx - q^s\, Cos. srx + q^{s+1}\, Cos. \{(s-1)rx\}}{1-2q\, Cos. rx + q^2} \frac{Cos. \Big\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\Big\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} x\, Si.(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c|1}} \frac{\pi}{4} \frac{d^c}{dm^c} \Big[m \{ Ei.(-m) - Ei.(m) \} \frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}} \Big] \;\ldots\; (549), \quad \int_0^\infty \frac{1 - q Cos. rx - q^s Cos. srx +}{1 - 2q Cos. rx +}$$

$$\frac{+ q^{s+1}\, Cos. \{(s-1)rx\}}{+q^2} \frac{Cos. \Big\{(c+1) Arctg. \frac{x}{m}\Big\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}} Ci.(x)\, dx = \frac{(-1)^c}{1^{c|1}} \frac{\pi}{4} \frac{d^c}{dm^c} \Big[Ei.(-m) \Big\{ \frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}} +$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos. srx}{1-2q Cos. rx + q^2} \frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m^3} \frac{1}{1-2q e^{-mr} Cos. mr + q^2 e^{-2mr}} \Big\{ e^{-smr} (Cos. smr + Sin. smr) +$$

$$+ (1-e^{-2mr}) q^s \sum_1^{s-1} q^{-n} e^{-nmr} (Cos. nmr + Sin. nmr) + \frac{1}{1-q^2} (1 + 2q e^{-mr} Sin. mr - q^2 e^{-2mr}) \sum_1^{s-1} q^n \Big\},$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos. srx}{1-2q Cos. rx + q^2} \frac{x^2\,dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m} \frac{1}{1-2q e^{-mr} Cos. mr + q^2 e^{-2mr}} \Big\{ e^{-smr} (Cos. smr - Sin. smr?) +$$

$$+ (1-e^{-2mr}) q^s \sum_1^{s-1} q^{-n} e^{-nmr} (Cos. nmr - Sin. nmr) + \frac{1}{1-q^2} (1 - 2q e^{-mr} Sin. mr - q^2 e^{-2mr}) \sum_1^{s-1} q^n \Big\}?$$

ou, quand on employe ici les valeurs des sommations A et B, trouvées plus haut $(\alpha\chi)$, $(\alpha\psi)$,

$$\int_0^\infty \frac{Cos. srx}{1-2q\, Cos. rx + q^2} \frac{dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{8m^3} \frac{1}{1-2q e^{-mr} Cos. mr + q^2 e^{-2mr}} \Big[\frac{q}{1-q} \frac{1-q^{s-1}}{1-q^2}$$

$$(1+2q e^{-mr} Sin. mr - q^2 e^{-2mr}) + \frac{\{q^{s+1} e^{-mr} (Cos. mr + Sin. mr) - q^s e^{-2mr}\} (1-e^{-2mr}) -}{q^2 -}$$

$$\frac{- q e^{-(s+1)mr} [Cos. \{(s+1)mr\} + Sin. \{(s+1)mr\}] + (1+q^2) e^{-(s+2)mr} (Cos. smr +}{- 2q e^{-mr} Cos. mr +}$$

$$\frac{+ Sin. smr) - q e^{-(s+3)mr} [Cos. \{(s-1)mr\} + Sin. \{(s-1)mr\}]}{+ e^{-2mr}} \Big] \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (543),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos. srx}{1-2q\, Cos. rx + q^2} \frac{x^2\,dx}{4m^4+x^4} = \frac{\pi}{4m} \frac{1}{1-2q e^{-mr} Cos. mr + q^2 e^{-2mr}} \Big[\frac{q}{1-q} \frac{1-q^{s-1}}{1-q^2}$$

$$(1-2q e^{-mr} Sin. mr - q^2 e^{-2mr}) + \frac{\{q^{s+1} e^{-mr} (Cos. mr - Sin. mr) - q^s e^{-2mr}\} (1-e^{-2mr}) -}{q^2 -}$$

$$\frac{- q e^{-(s+1)mr} [Cos. \{(s+1)mr\} - Sin. \{(s+1)mr\}] + (1+q^2) e^{-(s+2)mr} (Cos. smr -}{- 2q e^{-mr} Cos. mr +}$$

$$\frac{- Sin. smr) - q e^{-(s+3)mr} [Cos. \{(s-1)mr\} - Sin. \{(s-1)mr\}]}{+ e^{-2mr}} \Big] \;\ldots\ldots\; (544).$$

$+\frac{1-q^s e^{smr}}{1-q e^{mr}}\Big\}\Big]$ .... (550), $\int_0^\infty \frac{1-q\, Cos.\, rx - q^s\, Cos.\, srx + q^{s+1}\, Cos.\{(s-1)\,rx\}}{1-2\,q\, Cos.\, rx + q^2}$

$\frac{Sin.\left\{(c+1)\, Arctg.\, \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Si.(x)\, dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\, \frac{\pi}{4}\, \frac{d^c}{dm^c}\Big[\{Ei.(-m) - Ei.(m)\}\; \frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}}\Big]$ ... (551)

$$\int_0^\infty \frac{1-q\, Cos.\, rx - q^s\, Cos.\, srx + q^{s+1}\, Cos.\{(s-1)\,rx\}}{1-2\,q\, Cos.\, rx + q^2}\; \frac{Sin.\left\{(c+1)\, Arctg.\, \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Ci.(x)\; \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\; \frac{\pi}{4}\; \frac{d^c}{dm^c}\; \Big[\frac{1}{m}\, Ei.(-m)\; \Big\{\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}} + \frac{1-q^s e^{smr}}{1-q e^{mr}}\Big\}\Big]$$ .... (552),

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, rx - q^{s-1}\, Sin.\, srx + q^s\, Sin.\{(s-1)\,rx\}}{1-2\,q\, Cos.\, rx + q^2}\; \frac{Cos.\left\{(c+1)\, Arctg.\, \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Si.(x)\; dx =$$

$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\, \frac{\pi}{4q}\, \frac{d^c}{dm^c}\Big[\{Ei.(m) - Ei.(-m)\}\; \Big\{\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}} - 1\Big\}\Big]$ (553), $\int_0^\infty \frac{Sin.\, rx - q^{s-1}\, Sin.\, srx +}{1-2\,q\, Cos.\, rx +}$

$\frac{+\, q^s\, Sin\,\{(s-1)rx\}}{+\, q^2}\; \frac{Cos.\left\{(c+1)\, Arctg.\, \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; x\, Ci.(x)\; dx = \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\; \frac{\pi}{4}\; \frac{d^c}{dm^c}\; \Big[m\, Ei.(-m)$

$\frac{e^{-mr} - e^{mr} + q^{s-1}\,(e^{smr} - e^{-smr}) + q^s\,(e^{(1-s)mr} - e^{(s-1)mr})}{1-q\,(e^{mr}+e^{-mr}) + q^2}\Big]$ .... (554),

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, rx - q^{s-1}\, Sin.\, srx + q^s\, Sin\,\{(s-1)\,rx\}}{1-2\,q\, Cos.\, rx + q^2}\; \frac{Sin.\left\{(c+1)\, Arctg.\, \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Si.(x)\; \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\; \frac{\pi}{4q}\; \frac{d^c}{dm^c}\; \Big[\frac{1}{m}\,\{Ei.(m) - Ei.(-m)\}\; \Big\{\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}} - 1\Big\}\Big]$$ .... (555),

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, rx - q^{s-1}\, Sin.\, srx + q^s\, Sin.\{(s-1)\,rx\}}{1-2\,q\, Cos.\, rx + q^2}\; \frac{Sin.\left\{(c+1)\, Arctg.\, \frac{x}{m}\right\}}{(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}(c+1)}}\; Ci.(x)\; dx =$$

$= \frac{(-1)^c}{1^{c/1}}\; \frac{\pi}{4}\; \frac{d^c}{dm^c}\; \Big[Ei.(-m)\; \frac{e^{-mr} - e^{mr} + q^{s-1}\,(e^{smr} - e^{-smr}) +}{1-q\,(e^{mr}+e^{-mr}) +}$

$\frac{+\, q^s\,(e^{(1-s)mr} - e^{(s-1)mr})}{+\, q^2}\Big]$ .... (556).

§. III. DE QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES À DÉNOMINATEUR ALGÉBRIQUE BINÔME DE LA FORME $q^a - x^a$, $(q^a - x^a)^b$.

31. Toutes les intégrales du paragraphe précédent avaient au dénominateur un facteur de la forme $q^a + x^a$; la cause en était que ce facteur se trouvait déjà dans les théorèmes généraux (XVI) à (LIII) du N°. 20. Tout de même il nous sera possible de déduire d'autres théorèmes, analogues à ceux-là, mais à un facteur ou à plusieurs facteurs de la forme $q^a - x^a$ au dénominateur.

A cet effet prenons d'abord les intégrales $\int_0^\infty Cos.\, ax \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} Sin. am \ldots (\alpha\omega)$ et $\int_0^\infty Sin.\, ax \frac{xdx}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2} Cos.\, am \ldots (\beta\omega)$ [72], multiplions les formules (A) et (E) par $\frac{dx}{m^2 - x^2}$ et les autres (B) et (F) par $\frac{xdx}{m^2 - x^2}$, et intégrons ensuite entre les limites 0 et ∞ de x; ainsi nous trouverons:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2} \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \left\{ \beta\, Sin.\, mr \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2} Sin.\, 2mr \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4mi} \left\{ f(\alpha + \beta e^{mri}) - f(\alpha + \beta e^{-mri}) \right\}, \quad \ldots\ldots \quad \text{(LIV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i} \frac{xdx}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2} \left\{ \beta\, Cos.\, mr \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2} Cos.\, 2mr \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left\{ 2f(\alpha) - f(\alpha + \beta e^{mri}) - f(\alpha + \beta e^{-mri}) \right\}; \quad \ldots\ldots \quad \text{(LV)}$$

et par un procédé tout-à-fait analogue, encore:

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2} \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{4mi} \left\{ f(\alpha + \beta e^{mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{mr_1 i}, \ldots) - \right.$$

$$\left. - f(\alpha + \beta e^{-mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{-mr_1 i}, \ldots) \right\}, \quad \ldots\ldots \quad \text{(LVI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i} \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{4} \left\{ 2f(\alpha, \alpha_1, \ldots) - f(\alpha + \beta e^{mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{mr_1 i}, \ldots) - \right.$$

$$\left. - f(\alpha + \beta e^{-mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{-mr_1 i}, \ldots) \right\}. \quad \ldots\ldots \quad \text{(LVII)}$$

On a ensuite $\int_0^\infty Cos.\, ax \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3} (e^{-am} + Sin.\, am) \ldots\ldots\ldots (\beta\beta)$.

[72] On trouve ces intégrales dans les Tables d'intégrales définies, T. 206, N°. 2, 1; on les doit à BIDONE, qui le premier les a déduites dans les Mém. de Torino 1812, p. 131, Art. 2, N°. 29.

$\int_0^\infty Cos.\ ax\ \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m}\ (Sin.\ am - e^{-am}) \ldots (\beta_1)$, $\int_0^\infty Sin.\ ax\ \frac{x dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\ (e^{-am} - Cos.\ am) \ldots (\beta_3)$, $\int_0^\infty Sin.\ ax\ \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} = -\frac{\pi}{4}\ (e^{-am} + Cos.\ am) \ldots (\beta_4)$ [73].

Eu égard à ces intégrales on peut multiplier les développements (A) et (E) par $\frac{dx}{m^4 - x^4}$ et par $\frac{x^2 dx}{m^4 - x^4}$, et les autres formules (B) et (F) par $\frac{x dx}{m^4 - x^4}$, et par $\frac{x^3 dx}{m^4 - x^4}$: puisqu'on a encore les intégrales $\int_0^\infty \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3} \ldots (\beta_5)$, $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = -\frac{\pi}{4m} \ldots (\beta_\eta)$ [74], on obtiendra de la sorte les théorèmes:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi) + F(-xi)}{2}\ \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3} \Big\{ f(\alpha) + \beta\ (e^{-mr} + Sin.\ mr)\ \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2}\ (e^{-2mr} + Sin.\ 2mr)\ \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \Big\} = \frac{\pi}{4m^3}\ [f(\alpha + \beta e^{-mr}) + \frac{1}{2i} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) - f(\alpha + \beta e^{-mri}) \}], \quad \text{(LVIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi) + F(-xi)}{2}\ \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m} \Big\{ -f(\alpha) + \beta\ (Sin.\ mr - e^{-mr})\ \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2}\ (Sin.\ 2mr - e^{-2mr})\ \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \Big\} = \frac{\pi}{4m}\ [\frac{1}{2i} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) - f(\alpha + \beta e^{-mri}) \} - f(\alpha + \beta e^{-mr})], \quad \text{(LIX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi) - F(-xi)}{2i}\ \frac{x dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^2} \Big\{ \beta\ (e^{-mr} - Cos.\ mr)\ \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2}\ (e^{-2mr} - Cos.\ 2mr)\ \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \Big\} = \frac{\pi}{4m^2}\ [f(\alpha + \beta e^{-mr}) - \frac{1}{2} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) + f(\alpha + \beta e^{-mri}) \}], \quad \text{(LX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi) - F(-xi)}{2i}\ \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} = -\frac{\pi}{4} \Big\{ \beta\ (e^{-mr} + Cos.\ mr)\ \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2}\ (e^{-2mr} + Cos.\ 2mr)\ \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \Big\} = \frac{\pi}{4}\ [2f(\alpha) - f(\alpha + \beta e^{-mr}) - \frac{1}{2} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) + f(\alpha + \beta e^{-mri}) \}] \quad \text{(LXI)}$$ [75].

De la même manière on obtient encore:

---

[73] Ce sont les intégrales, que j'ai déduites dans les Tables d'intégrales définies, T. 207, N°. 13, 15, 10 et 12.

[74] Or, on peut évaluer ces intégrales de la manière suivante. Dans l'intégrale T. 20, N°. 13 faites d'abord $mx = y$ et $p = 4$, alors il vient $\int_0^\infty \frac{x^{q-1} dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4}\ m^{q-4}\ Cot.\ \frac{1}{4} q \pi$, $(q < 4)$ $(\beta\theta)$. Faites ensuite $q = 1$ et $= 3$ respectivement, vous aurez $\int_0^\infty \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4}\ m^{-3}\ Cot.\ \frac{1}{4} \pi = \frac{\pi}{4m^3}$, $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4}\ m^{-1}\ Cot.\ \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4m}$, comme on l'a annoncé.

[75] Ces quatre théorèmes pourraient aussi se déduire des théorèmes (XVI) et (XVII) et de (LIV) et (LV).

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{F}_a(xi)+\mathrm{F}_a(-xi)}{2} \frac{dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^3} \left[f(\alpha+\beta\, e^{-mr}, \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots) + \frac{1}{2i}\left\{f(\alpha+\beta\, e^{mri},\right.\right.$$

$$\left.\left.\alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1i},\ldots) - f(\alpha+\beta\, e^{-mri}, \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1i},\ldots)\right\}\right], \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(LXII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{F}_a(xi)+\mathrm{F}_a(-xi)}{2} \frac{x^2dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m} \left[\frac{1}{2i}\left\{f(\alpha+\beta\, e^{mri}, \alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1i},\ldots) - f(\alpha+\beta\, e^{-mri},\right.\right.$$

$$\left.\left.\alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1i},\ldots)\right\} - f(\alpha+\beta\, e^{-mr}, \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots)\right], \ldots\ldots\ldots \quad \text{(LXIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{F}_a(xi)-\mathrm{F}_a(-xi)}{2i} \frac{xdx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^2} \left[f(\alpha+\beta\, e^{-mr}, \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots) - \frac{1}{2}\left\{f(\alpha+\beta\, e^{mri},\right.\right.$$

$$\left.\left.\alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1i},\ldots) + f(\alpha+\beta\, e^{-mri}, \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1i},\ldots)\right\}\right], \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(LXIV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{F}_a(xi)-\mathrm{F}_a(-xi)}{2i} \frac{x^3dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4} \left[2f(\alpha,\alpha_1,\ldots) - f(\alpha+\beta\, e^{-mr}, \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left\{f(\alpha+\beta\, e^{mri}, \alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1i},\ldots) + f(\alpha+\beta\, e^{-mri}, \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1i},\ldots)\right\}\right]. \;\ldots \quad \text{(LXV)}$$

Les intégrales définies $\int_0^\infty Cos.\, ax \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3} (Sin.\, am - am\, Cos.\, am) \ldots (\beta\iota)$, $\int_0^\infty Cos.\, ax \frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{-\pi}{4m} (Sin.\, am + am\, Cos.\, am) \ldots (\beta\varkappa)$, $\int_0^\infty Sin.\, ax \frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi a}{4m} Sin.\, am \ldots (\beta\lambda)$, $\int_0^\infty Sin.\, ax \frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4} (2\, Cos.\, am - am\, Sin.\, am) \ldots (\beta\mu)$ [76] donnent lieu à quelques autres théorèmes. A cet effet multiplions les formules (A) et (E) par $\frac{dx}{(m^2-x^2)^2}$ et par $\frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2}$, et les formules (B) et (F) par $\frac{xdx}{(m^2-x^2)^2}$ et par $\frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2}$, puis intégrons entre les limites 0 et ∞ par rapport à x, nous aurons, puisque $\int_0^\infty \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = 0 \ldots (\beta\nu)$, $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = 0 \ldots (\beta\xi)$ [77]:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{F}(xi)+\mathrm{F}(-xi)}{2} \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3} \left\{\beta\, (Sin.\, mr - mr\, Cos.\, mr) \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2} (Sin.\, 2mr - \right.$$

---

[76] De ces intégrales définies la première se trouve T. 208, N°. 17 des Tables d'intégrales définies: les trois autres ont été évaluées dans mon „Exposé de la théorie des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies"; mémoire que l'Académie Royale des Sciences a admis pour constituer le Tome VIII de ses Mémoires, encore en cours de publication. On les y trouve dans la Troisième Partie, Méthode 32 au N°. 2.

[77] La première de ces intégrales se trouve T. 21, N°. 7: la seconde s'en déduit à l'aide de la formule de T. 19, N°. 4, puisque

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = m^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} - \int_0^\infty \frac{dx}{m^2-x^2} = m^2.0 - 0 = 0.$$

$$- 2mr \, Cos.\, 2mr) \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \} = \frac{\pi}{4m^3} \left(\frac{1}{2i} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) - f(\alpha + \beta e^{-mri}) \} - \right.$$

$$\left. - mr\beta \frac{d}{d\beta} . \left[\frac{1}{2} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) + f(\alpha + \beta e^{-mri}) \} \right] \right), \quad \ldots \ldots \quad \text{(LXVI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi) + F(-xi)}{2} \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4m} \{ -\beta \, (Sin.\, mr + mr \, Cos.\, mr) \frac{df(\alpha)}{d\alpha} - \frac{\beta^2}{1.2} (Sin\, 2mr +$$

$$+ 2mr \, Cos.\, 2mr) \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \} = \frac{-\pi}{4m} \left(\frac{1}{2i} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) - f(\alpha + \beta e^{-mri}) \} + \right.$$

$$\left. + mr\beta \frac{d}{d\beta} . \left[\frac{1}{2} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) + f(\alpha + \beta e^{-mri}) \} \right] \right), \quad \ldots \ldots \quad \text{(LXVII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi) - F(-xi)}{2i} \frac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4m} \{ \beta r \, Sin.\, mr \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2} 2r \, Sin.\, 2mr \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \} =$$

$$= \frac{\pi\beta r}{4m} \frac{d}{d\beta} . \left[\frac{1}{2i} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) - f(\alpha + \beta e^{-mri}) \} \right], \quad \ldots \ldots \quad \text{(LXVIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi) - F(-xi)}{2i} \frac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4} \{ \beta \, (2 \, Cos.\, mr - mr \, Sin.\, mr) \frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2} (2 \, Cos.\, 2mr -$$

$$- 2mr \, Sin.\, 2mr) \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots \} = \frac{\pi}{4} \left(\{ f(\alpha + \beta e^{mri}) + f(\alpha + \beta e^{-mri}) \} - 2f(\alpha) - \right.$$

$$\left. - mr\beta \frac{d}{d\beta} . \left[\frac{1}{2i} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}) - f(\alpha + \beta e^{-mri}) \} \right] \right), \quad \ldots \ldots \quad \text{(LXIX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi) + F_a(-xi)}{2} \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3} \left(\frac{1}{2i} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{mr_1 i}, \ldots) - \right.$$

$$- f(\alpha + \beta e^{-mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{-mr_1 i}, \ldots) \} - m \left[r\beta \frac{d}{d\beta} + r_1 \beta_1 \frac{d}{d\beta_1} + \ldots \right] . \left[\frac{1}{2} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}, \right.$$

$$\left. \left. \alpha_1 + \beta_1 e^{mr_1 i}, \ldots) + f(\alpha + \beta e^{-mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{-mr_1 i}, \ldots) \} \right] \right), \text{ [78]} \quad \ldots \ldots \quad \text{(LXX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi) + F_a(-xi)}{2} \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{-\pi}{4m} \left(\frac{1}{2i} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{mr_1 i}, \ldots) - \right.$$

$$- f(\alpha + \beta e^{-mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{-mr_1 i}, \ldots) \} + m \left[r\beta \frac{d}{d\beta} + r_1 \beta_1 \frac{d}{d\beta_1} + \ldots \right] . \left[\frac{1}{2} \{ f(\alpha + \beta e^{mri}, \right.$$

$$\left. \left. \alpha_1 + \beta_1 e^{mr_1 i}, \ldots) + f(\alpha + \beta e^{-mri}, \alpha_1 + \beta_1 e^{-mr_1 i}, \ldots) \} \right] \right), \quad \ldots \ldots \quad \text{(LXXI)}$$

---

[78] Ici la notation symbolique $[r\beta \frac{d}{d\beta} + r_1 \beta_1 \frac{d}{d\beta_1} + \ldots]$, qu'on pourrait remplacer par l'autre encore plus simple $\Sigma r\beta \frac{d}{d\beta}$, désigne, suivant le calcul des opérations, qu'il faut différentier la fonction suivant β, et puis multiplier le résultat par $r\beta$, qu'il faut réitérer cette opération pour tous les β séparément, et qu'ensuite il faut prendre la somme de toutes les valeurs obtenues ainsi.

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m}\,[r\beta\,\frac{d}{d\beta} + r_1\beta_1\,\frac{d}{d\beta_1}+\ldots].\,[\frac{1}{2i}\,\{f(\alpha+\beta\,e^{mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{mr_1i},\ldots) - f(\alpha+\beta\,e^{-mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1i},\ldots)\}]. \ldots\ldots \text{(LXXII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4}\,(\{f(\alpha+\beta\,e^{mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{mr_1i},\ldots) + f(\alpha+\beta\,e^{-mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1i},\ldots)\} - 2f(\alpha,\alpha_1,\ldots) - m\,[r\beta\,\frac{d}{d\beta} + r_1\beta_1\,\frac{d}{d\beta_1}+\ldots].\,[\frac{1}{2i}\,\{f(\alpha+\beta\,e^{mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{mr_1i},\ldots) - f(\alpha+\beta\,e^{-mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1i},\ldots)\}]). \ldots\ldots \text{(LXXIII)}$$

Encore a-t-on les intégrales $\int_0^\infty Cos.\,ax.\,Si.(x)\,\frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\,Si.(m).\,Sin.\,am \ldots (\beta_o)$, $\int_0^\infty Si.(x)\,\frac{xdx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\,Ci.(m)\;(\beta_\pi)$, $\int_0^\infty Sin.ax.Si.(x)\,\frac{dx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2m}\,Si.(m).\,Cos.am\;(\beta_\psi)$ [79]. Par conséquent la multiplication des formules (A) et (E) par $Si.(x)\,\frac{xdx}{m^2-x^2}$, comme de même celle des développements (B) et (F) par $Si.(x)\,\frac{dx}{m^2-x^2}$, suivie de l'intégration par rapport à x, entre les limites 0 et ∞, fournira les théorèmes:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)+F(-xi)}{2}\,Si.(x)\,\frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\,\{-Ci.(m).\,f(\alpha) + Si.(m).\,(\beta\,Sin.\,mr\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2}\,Sin.\,2mr\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots)\} = \frac{\pi}{2}\,[-Ci.(m).\,f(\alpha) + \frac{1}{2i}\,Si.(m).\,\{f(\alpha+\beta\,e^{mri}) - f(\alpha+\beta\,e^{-mri})\}]. \ldots\ldots \text{(LXXIV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\,Si.(x)\,\frac{dx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2m}\,Si.(m).\,(\beta\,Cos.\,mr\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\beta^2}{1.2}\,Cos.\,2mr\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots) = \frac{\pi}{2m}\,Si.(m).\,[f(\alpha) - \frac{1}{2}\,\{f(\alpha+\beta\,e^{mri}) + f(\alpha+\beta\,e^{-mri})\}]. \ldots\ldots \text{(LXXV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)+F_a(-xi)}{2}\,Si.(x)\,\frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\,[-Ci.(m).\,f(\alpha,\alpha_1,\ldots) + \frac{1}{2i}\,Si.(m).\,\{f(\alpha+\beta\,e^{mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{mr_1i},\ldots) - f(\alpha+\beta\,e^{-mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1i},\ldots)\}]. \ldots\ldots \text{(LXXVI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,Si.(x)\,\frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\,Si.(m).\,[f(\alpha,\alpha_1,\ldots) - \frac{1}{2}\,\{f(\alpha+\beta\,e^{mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{mr_1i},\ldots) + f(\alpha+\beta\,e^{-mri},\alpha_1+\beta_1\,e^{-mr_1i},\ldots)\}]. \ldots\ldots \text{(LXXVII)}$$

32. Pour l'application de ces théorèmes, commençons par les développements du N°. 4, et d'abord par les formules (a) jusqu'à (f). On a ici $f(\alpha) = 1$,

---

[79] Ces intégrales ont été évaluées dans l'ouvrage cité, Exposé de la théorie, etc., Troisième Partie: les deux premières dans la Méthode 20 au N°. 3, et la dernière dans la Méthode 18 au N°. 24.

$f(\alpha+\beta e^{\pm mr}) = (1+e^{\pm mr})^s$, $f(\alpha+\beta e^{mri}) = (1+e^{mri})^s = e^{\frac{1}{2}smri}\,(e^{-\frac{1}{2}mri}+e^{\frac{1}{2}mri})^s =$ $= (2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}mr)^s\,(Cos.\,\tfrac{1}{2}smr + i\,Sin.\,\tfrac{1}{2}smr)$, d'où pour $-i$ au lieu de i: $f(\alpha+\beta e^{-mri}) = (2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}mr)^s\,(Cos.\,\tfrac{1}{2}smr - i\,Sin.\,\tfrac{1}{2}smr)$. Ensuite $\frac{d}{d\beta}.f(\alpha+\beta e^{mri}) =$ $= \frac{d}{d\beta}.(\alpha+\beta e^{mri})^s = s(1+e^{mri})^{s-1}e^{mri} = s(2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}mr)^{s-1}\left\{Cos.\,(\frac{s-1}{2}mr) + i\,Sin.\,(\frac{s-1}{2}mr)\right\}(Cos.\,mr + i\,Sin.\,mr) = s(2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}mr)^{s-1}\left\{Cos.(\frac{s+1}{2}mr) + i\,Sin.(\frac{s+1}{2}mr)\right\}$, et analoguement $\frac{d}{d\beta}.f(\alpha+\beta e^{-mri}) = s(2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}mr)^{s-1}\left\{Cos.(\frac{s+1}{2}mr) - i\,Sin.(\frac{s+1}{2}mr)\right\}$.



Par conséquent, lorsqu'on double tous les r pour éviter les fractions, on aura:

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.\,srx\,\frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\,Cos.^s mr.\,Sin.\,smr$ ... (557), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Sin.\,srx\,\frac{xdx}{m^2-x^4} =$ $= \frac{\pi}{2}\,(2^{-s} - Cos.^s mr.\,Cos.\,smr)$ ... (558), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1} r_1x \dots Cos.\left\{(sr+s_1r_1+\dots)x\right\}\frac{dx}{m^2-x^2} =$ $= \frac{\pi}{2m}\,Cos.^s mr.\,Cos.^{s_1} mr_1 \dots Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\dots)m\right\}$ ... (559), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1} r_1x \dots$ $Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\dots)x\right\}\frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\left\{2^{-s-s_1-\dots} - Cos.^s mr.\,Cos.^{s_1} mr_1 \dots Cos.\left\{(sr+s_1r_1+\dots)m\right\}\right\}$ (560),

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.\,srx\,\frac{dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\left\{2^{-s}(1+e^{-2mr})^s + Cos.^s mr.\,Sin.\,smr\right\}$ ... (561),

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.\,srx\,\frac{x^2dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m}\left\{Cos.^s mr.\,Sin.\,smr - 2^{-s}(1+e^{-2mr})^s\right\}$ ... (562),

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Sin.\,srx\,\frac{xdx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\left\{2^{-s}(1+e^{-2mr})^s - Cos.^s mr.\,Cos.\,smr\right\}$ ... (563),

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Sin.\,srx\,\frac{x^3dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4}\left[2^{-s}\left\{2-(1+e^{-2mr})^s\right\} - Cos^s mr.\,Cos.\,smr\right]$ ... (564),

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1} r_1x \dots Cos.\left\{(sr+s_1r_1+\dots)x\right\}\frac{dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\left[2^{-s-s_1-\dots}(1+e^{-2mr})^s\right.$ $\left.(1+e^{-2mr_1})^{s_1}\dots + Cos.^s mr.\,Cos.^{s_1} mr_1 \dots Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\dots)m\right\}\right]$ ... (565), $\int_0^\infty Cos.^s rx.$ $Cos.^{s_1} r_1x \dots Cos.\left\{(sr+s_1r_1+\dots)x\right\}\frac{x^2dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m}\left[Cos.^s mr.\,Cos.^{s_1} mr_1 \dots Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\dots)m\right\} -\right.$ $\left.- 2^{-s-s_1-\dots}(1+e^{-2mr})^s(1+e^{-2mr_1})^{s_1}\dots\right]$ .... (566), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\,Cos.^{s_1} r_1x \dots$ $Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\dots)x\right\}\frac{xdx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\left[2^{-s-s_1-\dots}(1+e^{-2mr})^s(1+e^{-2mr_1})^{s_1}\dots -\right.$

$- \; Cos.^{s} mr. \; Cos.^{s_1} mr_1 \ldots \; Cos. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \}] \;\ldots\; (567), \; \int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Cos.^{s_1} r_1 x \ldots$
$Sin. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} \; \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4} \; [2^{-s-s_1-\ldots} \{ 2 - (1 + e^{-2mr})^{s} \; (1 + e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots \} \; -$
$- \; Cos.^{s} mr. \; Cos.^{s_1} mr_1 \ldots \; Cos. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \}] \;\ldots\; (568), \; \int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Cos. srx \; \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} =$
$= \frac{\pi}{4m^3} \; [Cos.^{s} mr. \; Sin. smr \; - \; mrs \; Cos.^{s-1} mr. \; Cos. \{ (s+1) mr \}] \;\ldots\; (569), \; \int_0^\infty Cos.^{s} rx.$
$Cos. srx \; \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = - \frac{\pi}{4m} \; [Cos.^{s} mr. \; Sin. smr + mrs \; Cos.^{s-1} mr. \; Cos. \{ (s+1) mr \}] \;\ldots\; (570),$
$\int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Sin. \; srx \; \frac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi s r}{2m} \; Cos.^{s-1} mr. \; Sin. \{ (s+1) mr \} \;\ldots\ldots\; (571),$
$\int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Sin. \; srx \; \frac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4} \; [2 \; Cos.^{s} mr. \; Cos. \; smr \; - \; mrs \; Cos.^{s-1} mr.$
$Sin. \{ (s+1) mr \} - 2^{1-s}] \;\ldots\; (572), \; \int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Cos.^{s_1} r_1 x \ldots \; Cos. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} \; \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} =$
$= \frac{\pi}{4m^3} \; Cos.^{s} mr. \; Cos.^{s_1} mr_1 \ldots \; [Sin. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \} - m \, (sr \; Cos. \{ (s+1) mr \} . \; Sec. \, mr \; +$
$+ \; s_1 r_1 \; Cos. \{ (s_1 + 1) mr_1 \} . \; Sec. \; mr_1 + \ldots)] \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (573), \; \int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Cos.^{s_1} r_1 x \ldots$
$Cos. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} \; \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = - \frac{\pi}{4m} \; Cos.^{s} mr. \; Cos.^{s_1} mr_1 \ldots \; [Sin. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \} \; +$
$+ \; m \, (sr \; Cos. \{ (s+1) mr \} . \; Sec. \; mr \; + \; s_1 r_1 \; Cos. \{ (s_1 + 1) mr_1 \} . \; Sec. \; mr_1 + \ldots)] \;\ldots\ldots\; (574),$
$\int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Cos.^{s_1} r_1 x \ldots \; Sin. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} \; \frac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{2m} \; Cos.^{s} mr. \; Cos.^{s_1} mr_1 \ldots$
$[sr \; Sin. \{ (s+1) mr \} . \; Sec. \; mr \; + \; s_1 r_1 \; Sin. \{ (s_1 + 1) mr_1 \} . \; Sec. \; mr_1 + \ldots] \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (575),$
$\int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Cos.^{s_1} r_1 x \ldots \; Sin. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} \; \frac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4} \; (Cos.^{s} mr. \; Cos.^{s_1} mr_1 \ldots$
$[2 \; Cos. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \} - m \, (sr \; Sin. \{ (s+1) mr \} . \; Sec. \, mr + s_1 r_1 \; Sin. \{ (s_1 + 1) mr_1 \} . \; Sec. \, mr_1 + \ldots)] \; -$
$- \; 2^{1-s-s_1-\ldots}) \;\ldots\; (576), \; \int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Cos. \; srx. \; Si.(x) \; \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \; \{ -2^{-s} \; Ci.(m) \; +$
$+ \; Si.(m). \; Cos.^{s} mr. \; Sin. \, smr \} \;\ldots\; (577), \; \int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Sin. \, srx. \; Si.(x) \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \; Si.(m). \; (2^{-s} \; -$
$- \; Cos.^{s} mr. \; Cos. \, smr) \;\ldots\; (578), \; \int_0^\infty Cos.^{s} rx. \; Cos.^{s_1} r_1 x \ldots \; Cos. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} . \; Si.(x) \; \frac{x dx}{m^2 - x^2} =$
$= \frac{\pi}{2} \; [- \, 2^{-s-s_1-\ldots} \; Ci.(m) \; + \; Si.(m). \; Cos.^{s} mr. \; Cos.^{s_1} mr_1 \ldots \; Sin. \{ (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \}] \;\ldots\; (579).$

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin. \{(sr + s_1 r_1 + \ldots)x\} .\ Si.(x)\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Si.(m). [2^{-s-s_1-\ldots} -$
$- Cos.^s mr.\ Cos.^{s_1} mr_1 \ldots\ Cos. \{(sr + s_1 r_1 + \ldots)m\}]\ \ldots\ (580).$

Les développements (g) à (m) exigent d'autres valeurs spéciales, et donnent ici: $f(\alpha) = 1$, $f(\alpha + \beta e^{-mr}) = (1 - e^{-mr})^s$, $f(\alpha + \beta e^{mri}) = (1 - e^{mri})^s = e^{\frac{1}{2} smri} (e^{-\frac{1}{2} mri} - e^{\frac{1}{2} mri})^s = e^{\frac{1}{2} srmi} (- 2 i\, Sin.\, \tfrac{1}{2} mr)^s = (2\, Sin.\, \tfrac{1}{2} mr)^s .\ e^{\frac{1}{2} srmi}\ e^{-s\pi i}$ [à cause de l'équation identique $(-i)^a = e^{-\frac{1}{2} a\pi i}] = (2\, Sin.\, \tfrac{1}{2} mr)^s .\ e^{-(\frac{1}{2} s\pi - \frac{1}{2} smr) i} = (2\, Sin.\, \tfrac{1}{2} mr)^s . \{ Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - \tfrac{1}{2} smr) - i\, Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - \tfrac{1}{2} smr) \}$, et par suite aussi $f(\alpha + \beta e^{-mri}) = (2\, Sin.\, \tfrac{1}{2} mr)^s . \{ Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - \tfrac{1}{2} smr) + i\, Sin. (\tfrac{1}{2} s\pi - \tfrac{1}{2} smr) \}$. Puis on a $\frac{d}{d\beta} . f(\alpha + \beta e^{mri}) = \frac{d}{d\beta} . (\alpha + \beta e^{mri})^s = s(1 - e^{mri})^{s-1} (+ e^{mri}) = s(e^{\frac{1}{2} mri} - e^{-\frac{1}{2} mri})^{s-1}\ e^{\frac{1}{2}(s-1) mri}\ e^{mri}\ e^{-\frac{1}{2}(s-1)\pi i} = s (2\, Sin.\, \tfrac{1}{2} mr)^{s-1} . [Cos. \{ \tfrac{1}{2} (s - 1) \pi - \tfrac{1}{2}(s+1) mr \} - i\, Sin. \{ \tfrac{1}{2}(s-1) \pi - \tfrac{1}{2} (s+1) mr \}]$, et de la même manière encore, en changeant le signe de i, $\frac{d}{d\beta} . f(\alpha + \beta e^{-mri}) = s(2\, Sin.\, \tfrac{1}{2} mr)^{s-1} . [Cos. \{ \tfrac{1}{2}(s-1) \pi - \tfrac{1}{2}(s+1) mr \} + i\, Sin. \{ \tfrac{1}{2}(s-1) \pi - \tfrac{1}{2}(s+1) mr \}]$. Par conséquent, après avoir doublé tous les r, il est:

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos. (\tfrac{1}{2} s \pi - srx)\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = - \frac{\pi}{2m}\ Sin.^s mr.\ Sin. (\tfrac{1}{2} s \pi - smr)\ \ldots .\ (581),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin. (\tfrac{1}{2} s \pi - srx)\ \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2}\ \{ -2^{-s} + Sin.^s mr.\ Cos. (\tfrac{1}{2} s\pi - smr) \}\ \ldots\ (582),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \}\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = - \frac{\pi}{2m}\ Sin.^s mr.$
$Sin.^{s_1} mr_1 \ldots\ Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \}\ \ldots .\ (583),$ $\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$
$Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \}\ \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2}\ [-2^{-s-s_1-\ldots} + Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots$
$Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \}]\ \ldots\ (584),$ $\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos. (\tfrac{1}{2} s \pi - srx)\ \frac{dx}{m^4 - x^4} =$
$= \frac{\pi}{4m^3}\ \{ 2^{-s} (1 - e^{-2mr})^s - Sin.^s mr.\ Sin. (\tfrac{1}{2} s \pi - smr) \}\ \ldots\ldots .\ (585),$ $\int_0^\infty Sin.^s rx.$
$Cos. (\tfrac{1}{2} s \pi - srx)\ \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = \frac{-\pi}{4m}\ \{ 2^{-s} (1 - e^{-2mr})^s + Sin.^s mr.\ Sin. (\tfrac{1}{2} s \pi - smr) \}\ \ldots\ (586),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin. (\tfrac{1}{2} s\pi - srx)\ \frac{x dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\ \{ Sin.^s mr.\ Cos. (\tfrac{1}{2} s\pi - smr) - 2^{-s} (1 - e^{-2mr})^s \}\ \ldots\ (587),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin. (\tfrac{1}{2} s\pi - srx)\ \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4} [2^{-s} \{ (1 - e^{-2mr})^s - 2 \} + Sin.^s mr. Cos. (\tfrac{1}{2} s\pi - smr)]\ \ldots\ (588)$

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \}\ \frac{dx}{m^4 - x^4} =$

$= \frac{\pi}{4m^3} \, [2^{-s-s_1-\dots}(1-e^{-2mr})^s \, (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots - Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 \dots \; Sin. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi -$

$- (sr+s_1r_1+\dots)m \}] \; \dots\dots\dots \; (589), \; \int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \dots \; Cos. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi -$

$- (sr+s_1r_1+\dots)x \} \; \frac{x^2dx}{m^4-x^4} = \frac{-\pi}{4m} \, [2^{-s-s_1-\dots} (1-e^{-2mr})^s \, (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots + Sin.^s mr.$

$Sin.^{s_1} mr_1 \dots \; Sin. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)m \}] \; \dots \; (590), \; \int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \dots$

$Sin. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)x \} \; \frac{xdx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^2} \; [Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 \dots$

$Cos. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)m \} - 2^{-s-s_1-\dots}(1-e^{-2mr})^s \, (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots] \; \dots \; (591),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \dots \; Sin. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)x \} \; \frac{x^3dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4} \; [2^{-s-s_1-\dots}$

$\{ (1-e^{-2mr})^s \, (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots - 2 \} + Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 \dots \; Cos. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi -$

$- (sr+s_1r_1+\dots)m \}] \; \dots\dots\dots\dots \; (592), \; \int_0^\infty Sin.^s rx. \; Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) \; \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} =$

$= \frac{-\pi}{4m^3} \; [Sin.^s mr. \; Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) + mrs \, Sin.^{s-1} mr. \; Cos. \{ (\tfrac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr \}] \; \dots \; (593),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx. \; Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) \; \frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m} \; [Sin.^s mr. \; Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) - mrs \, Sin.^{s-1} mr.$

$Cos. \{ \tfrac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr \}] \; \dots\dots\dots \; (594), \; \int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) \; \frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} =$

$= \frac{\pi sr}{2m} Sin.^{s-1} mr. \; Sin. \{ \tfrac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr \} \; \dots \; (595), \; \int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - srx) \, \frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2} =$

$= \frac{\pi}{4} \; [2^{1-s} - Sin.^s mr. \; Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) + msr \, Sin.^{s-1} mr. \; Sin. \{ \tfrac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr \}] \; \dots \; (596),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \dots \; Cos. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)x \} \; \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{-\pi}{4m^3} \; Sin.^s mr.$

$Sin.^{s_1} mr_1 \dots \; [Sin. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)m \} + m\,(sr \, Cos. \{ \tfrac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr \}.$

$Cosec. \, mr + s_1r_1 \; Cos. \{ \tfrac{1}{2}(s_1-1)\pi - (s_1+1)mr_1 \}. \; Cosec. \, mr_1 + \dots)] \; \dots\dots\dots\dots\dots \; (597),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \dots \; Cos. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)x \} \; \frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m} \; Sin.^s mr.$

$Sin.^{s_1} mr_1 \dots \; [Sin. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)m \} - m\,(sr \, Cos. \{ \tfrac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr \}.$

$Cosec. \, mr + s_1r_1 \; Cos. \{ \tfrac{1}{2}(s_1-1)\pi - (s_1+1)mr_1 \}. \; Cosec. \, mr_1 + \dots)] \; \dots\dots\dots\dots \; (598),$

$\int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \dots \; Sin. \{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\dots)x \} \; \frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{2m} \; Sin.^s mr.$

$Sin.^{s_1} mr_1 \dots \; [sr \; Sin. \{ \tfrac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr \}. \; Cosec. \, mr + s_1r_1 \; Sin. \{ \tfrac{1}{2}(s_1-1)\pi - (s_1+1)mr_1 \}.$

$Cosec.\, m r_1 + \ldots] \ldots\ldots\ldots\ldots (599)$, $\int_0^\infty Sin.^s rx.\;\; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\;\; Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$

$- (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} \dfrac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \dfrac{\pi}{4} [2^{1-s-s_1-\ldots} - Sin.^s mr.\; Sin.^{s_1} mr_1 \ldots (Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$

$- (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \} - m [sr\, Sin. \{ \tfrac{1}{2} (s-1) \pi - (s+1) mr \}.\; Cosec.\, mr + s_1 r_1\, Sin. \{ \tfrac{1}{2} (s_1 - 1) \pi -$

$- (s_1 + 1) mr_1 \}.\; Cosec.\, mr_1 + \ldots])] \ldots (600)$, $\int_0^\infty Sin.^s rx.\; Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx).\; Si.(x) \dfrac{x dx}{m^2 - x^2} =$

$= - \dfrac{\pi}{2} \{ Sin.^s mr.\;\; Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - smr).\;\; Si.(m) + 2^{-s}\; Ci.(m) \} \ldots\ldots\ldots (601)$, $\int_0^\infty Sin.^s rx.$

$Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx).\; Si.(x) \dfrac{dx}{m^2 - x^2} = \dfrac{\pi}{2m} Si.(m).\; \{ Sin.^s mr.\;\; Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - smr) - 2^{-s} \} \ldots (602)$.

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \}.\; Si.(x) \dfrac{x dx}{m^2 - x^2} = - \dfrac{\pi}{2} [Sin.^s mr.$

$Sin.^{s_1} mr_1 \ldots Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \}.\; Si.(m) + 2^{-s-s_1-\ldots}\; Ci.(m)] \ldots (603)$,

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\;\; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\;\; Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (sr + s_1 r_1 + \ldots) x \}.\;\; Si.(x) \dfrac{dx}{m^2 - x^2} =$

$= \dfrac{\pi}{2m} Si.(m).\; [Sin.^s mr.\; Sin.^{s_1} mr_1 \ldots Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (sr + s_1 r_1 + \ldots) m \} - 2^{-s-s_1-\ldots}] \ldots (604)$.

Enfin pour les fonctions plus générales (n) et (o) on trouve pour les mêmes valeurs spéciales et par les mêmes procédés:

$\int_0^\infty Cos.^q px.\;\; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\;\; Sin.^s rx.\;\; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\;\; Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots +$

$+ sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} \dfrac{dx}{m^2 - x^2} = - \dfrac{\pi}{2m} Cos.^q mp.\; Cos.^{q_1} mp_1 \ldots Sin.^s mr.\; Sin.^{s_1} mr_1 \ldots Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$

$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m \} \ldots (605)$, $\int_0^\infty Cos.^q px.\;\; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\;\; Sin.^s rx.\;\; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$

$Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} \dfrac{x dx}{m^2 - x^2} = \dfrac{\pi}{2} [2^{-q-q_1-\ldots-s-s_1-\ldots} -$

$- Cos.^q mp.\;\; Cos.^{q_1} mp_1 \ldots\;\; Sin.^s mr.\;\; Sin.^{s_1} mr_1 \ldots\;\; Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots +$

$+ sr + s_1 r_1 + \ldots) m \}] \ldots\ldots\ldots\ldots (606)$, $\int_0^\infty Cos.^q px.\;\; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\;\; Sin.^s rx.\;\; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$

$Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x \} \dfrac{dx}{m^4 - x^4} = \dfrac{\pi}{4m^3} [2^{-q-q_1-\ldots-s-s_1-\ldots}$

$(1 + e^{-2mp})^q\;\; (1 + e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots\;\; (1 - e^{-2mr})^s\;\; (1 - e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots - Cos.^q mp.\;\; Cos.^{q_1} mp_1 \ldots$

$Sin.^s mr.\;\; Sin.^{s_1} mr_1 \ldots\;\; Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) m \}] \ldots (607)$,

$\int_0^\infty Cos.^q px.\;\; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\;\; Sin.^s rx.\;\; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\;\; Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots +$

$+ sr + s_1 r_1 + \ldots)x \} \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = -\frac{\pi}{4m} [2-q-q_1-\ldots-s-s_1-\ldots (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots$ $(1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots + Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1\ldots \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1\ldots \; Sin.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi -$ $-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m\}] \ldots (608)$, $\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x\ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x\ldots$ $Sin.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\} \frac{x dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^2} [Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1\ldots$ $Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1\ldots \; Cos.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m\} - 2-q-q_1-\ldots-s-s_1-$ $(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots] \ldots (609)$, $\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x\ldots$ $Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x\ldots \; Sin.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\} \frac{x^3 dx}{m^4-x^4} =$ $= \frac{\pi}{4} [2-q-q_1-\ldots-s-s_1-\ldots \{(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots - 2\} +$ $+ Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1\ldots \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1\ldots \; Cos.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots +$ $+ sr+s_1r_1+\ldots)m\}] \ldots (610)$, $\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x\ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x\ldots \; Cos.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi -$ $-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\} \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{-\pi}{4m^3} Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1\ldots \; Sin.^s mr.$ $Sin.^{s_1} mr_1\ldots [Sin.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m\} + m(qp \, Cos.\{(q+1)mp\}. Sec. mp +$ $+ q_1p_1 \, Cos.\{(q_1+1)mp_1\}. \; Sec. \, mp_1 + \ldots + sr \; Cos.\{\frac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr\}. \; Cosec. \, mr +$ $+ s_1r_1 Cos.\{\frac{1}{2}(s_1-1)\pi - (s_1+1)mr_1\}. \; Cosec. \, mr_1 + \ldots)] \ldots (611)$, $\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x\ldots$ $Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x\ldots \; Cos.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\} \frac{x^2 dx}{(m^2-x^2)^2} =$ $= \frac{\pi}{4m} Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1\ldots \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1\ldots [Sin.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots +$ $+ sr+s_1r_1+\ldots)m\} - m(qp \; Cos.\{(q+1)mp\}. \; Sec. \, mp + q_1p_1 \; Cos.\{(q_1+1)mp_1\}.$ $Sec. \, mp_1 + \ldots + sr \, Cos.\{\frac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr\}. \; Cosec. \, mr + s_1r_1 \; Cos.\{\frac{1}{2}(s_1-1)\pi -$ $-(s_1+1)mr_1\}. \; Cosec. \, mr_1 + \ldots)] \ldots\ldots (612)$, $\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x\ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x\ldots$ $Sin.\{(s+s_1+\ldots)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\} \frac{x dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{2m} Cos.^q mp.$ $Cos.^{q_1} mp_1\ldots \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1\ldots [qp Sin.\{(q+1)mp\}. Sec. mp + q_1p_1 Sin.\{(q_1+1)mp_1\}. Sec. mp_1 + \ldots +$ $+ sr \; Sin.\{\frac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr\}. \; Cosec. \, mr + s_1r_1 \; Sin.\{\frac{1}{2}(s_1-1)\pi -$ $-(s_1+1)mr_1\}. \; Cosec. \, mr_1 + \ldots] \ldots (613)$, $\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x\ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x\ldots$

$Sin. \left\{ (s+s_1+...) \frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+...+sr+s_1r_1+...)x \right\} \frac{x^3 dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4} [2^{-q-q_1-...-s-s_1-...}$
$- Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1 ... \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 ... \; (Cos. \left\{ (s+s_1+...) \frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+...+ \right.$
$\left. + sr+s_1r_1+...)m \right\} + m \, [qp \, Sin. \{(q+1)mp\} . Sec. mp + q_1p_1 \, Sin. \{(q_1+1)mp_1\} . Sec. mp_1 + ... +$
$+ sr Sin. \{\frac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr\} . Cosec. mr + s_1r_1 \, Sin. \{\frac{1}{2}(s_1-1)\pi - (s_1+1)mr_1\} . Cosec. mr_1 + ...])] . (614),$

$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1x ... \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1x ... \; Cos. \left\{ (s+s_1+...) \frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+...+ \right.$
$\left. + sr+s_1r_1+...)x \right\} . Si.(x) \; \frac{x dx}{m^2-x^2} = - \frac{\pi}{2} \; [2^{-q-q_1-...-s-s_1-...} \; Ci.(m) + Cos.^q mp$
$Cos.^{q_1} mp_1 ... Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 ... Sin. \{(s+s_1+...)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+...+sr+s_1r_1+...)m\} . Si.(m)] . (615),$

$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1x ... \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1x ... \; Sin. \left\{ (s+s_1+...) \frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+...+ \right.$
$\left. + sr+s_1r_1+...)x \right\} . Si.(x) \; \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} \; Si.(m) . \; [Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1 ... \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 ...$
$Cos. \{(s+s_1+...)\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+...+sr+s_1r_1+...)m\} - 2^{-q-q_1-...-s-s_1-...}] \; ... \; (616).$

33. Tout comme dans les paragraphes précédents nous pourrons différentier ici quelques intégrales à facteur $Cos.^s rx$ par rapport à la constante s, et puis annuler cette constante: c'est le procédé du N°. 6, formules (λ), (λ'). De même que là, il ne nous est pas permis ici d'appliquer cette méthode aux intégrales qui au lieu d'un tel *Cosinus* contiennent le *Sinus* d'un argument analogue: ici non plus nous n'obtiendrions des résultats valables. Observons encore que dans le cas où l'on aurait à différentier une fonction de la forme $2^{-s}(1 \pm e^{-2mr})^s$, il faudrait préalablement la transformer dans la forme équivalente $\left(\frac{1 \pm e^{-2mr}}{2}\right)^s$, pour obtenir enfin la valeur cherchée $l \frac{1 \pm e^{-2mr}}{2}$. Ainsi nous trouverons par les intégrales (557), (561), (562):

$\int_0^\infty l \, Cos. \, rx \, \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} mr = \frac{1}{2} r\pi$ (T. 415, N°. 14), $\int_0^\infty l \, Cos. \, rx \, \frac{dx}{m^4-x^4} =$
$= \frac{\pi}{4m^3} \left(l \frac{1+e^{-2mr}}{2} + mr\right)$ (617), $\int_0^\infty l \, Cos. \, rx \, \frac{x^2 dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m} \left(mr - l \frac{1+e^{-2mr}}{2}\right)$ (618).

Maintenant appliquons notre procédé à la fonction $s \, Cos.^s mr. \; Cos. \{(s+1)mr\} . f(m)$: nous aurons d'abord par la différentiation suivant s: $f(m) \, [Cos.^s mr. \; Cos. \{(s+1)mr\} + + s \, (Cos.^s mr. \; l \, Cos. \, mr. \; Cos. \{(s+1)mr\} - Cos.^s mr. \; mr. \; Sin. \{(s+1)mr\})]$; puis faisons évanouir la constante s et nous obtiendrons simplement $f(m) \, Cos. \, mr$. Dès-lors les intégrales (569), (570) fournissent $\int_0^\infty l \, Cos. \, rx \, \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3} (mr - mr \, Sec. \, mr.$

$Cos. mr) = 0$ (619), $\int_0^\infty l\, Cos. rx \frac{x^2 dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{-\pi}{4m}(mr + mr\, Sec. mr.\, Cos. mr) = -\frac{1}{2}\pi r$ ... (620).

Ensuite nous déduisons de l'intégrale (577): $\int_0^\infty l\, Cos.\, rx.\ \ Si.(x)\ \frac{x dx}{m^2 - x^2} =$ $= \frac{\pi}{2} \left\{ Ci.(m).\, l2 + mr Si.(m) \right\}$ ... (621).

Lorsque à présent nous passons aux intégrales à facteur $Sin.^s rx$, les formules (581), (585), (586) nous donnent par l'intermédiaire des équations de réduction analogues (μ), (μ') du N°. 6: $\int_0^\infty l Sin. rx\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2m}(\frac{1}{2}\pi - mr) = \frac{\pi}{4m}(2mr - \pi)$ (T. 415, N°. 13) [80], $\int_0^\infty l Sin. rx\ \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\left(l\frac{1-e^{-2mr}}{2} + mr - \frac{1}{2}\pi\right)$ ... (622), $\int_0^\infty l Sin.\, rx\ \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m}\left(mr - \frac{1}{2}\pi - l\frac{1-e^{-2mr}}{2}\right)$ ... (623) [81].

Quant à la fonction $s Sin.^s mr.\ Cos.\left\{\frac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr\right\}.\ f(m)$, après la différentiation par rapport à s elle devient $f(m)\ [Sin.^s mr.\ Cos.\left\{\frac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr\right\} +$ $+ s\left\{Sin.^s mr.\ l\, Sin.\, mr.\ Cos.\left\{\frac{1}{2}(s-1)\pi - (s+1)mr\right\} - Sin.^s mr.\ (\frac{1}{2}\pi - mr).\ Sin.\left\{\frac{1}{2}(s-1)\pi - \right.\right.$ $\left.\left. - (s+1)mr\right\}\right\}]$, d'où, pour s égal à zéro, on déduit $-f(m)\ Sin.\, mr.$ Par conséquent les intégrales (593) et (594) donnent: $\int_0^\infty l\, Sin.\, rx\ \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3}(mr - \frac{1}{2}\pi +$ $+ mr\ Cosec.\, mr.\ Sin.\, mr) = \frac{\pi}{8m^3}(4mr - \pi)$ .... (626), $\int_0^\infty l\, Sin.\, rx\ \frac{x^2 dx}{(m^2-x^2)^2} =$ $= \frac{\pi}{4m}(\frac{1}{2}\pi - mr + mr\ Cosec.\, mr.\ Sin.\, mr) = \frac{\pi^2}{8m}$ ... (627) [82].

---

[80] La différence des deux intégrales T. 415, N°. 13 et 14, dont la dernière a été évaluée au commencement de ce Numéro, donne:

$$\int_0^\infty l\, Tg.\, rx\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\ \text{(T. 415, N°. 17).}$$

[81] Par voie de soustraction on déduit de ces deux dernières et des intégrales (617), (618)

$$\int_0^\infty l\, Tg.\, rx\ \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\left\{l\frac{e^{mr} - e^{-mr}}{e^{mr} + e^{-mr}} - \frac{1}{2}\pi\right\} \ \ldots\ldots. (624),$$

$$\int_0^\infty l\, Tg.\, rx\ \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m}\left\{l\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{e^{mr} - e^{-mr}} - \frac{1}{2}\pi\right\} \ \ldots\ldots. (625).$$

[82] La différence entre ces intégrales et les précédentes (619), (620) donne encore:

$$\int_0^\infty l\, Tg.\, rx\ \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{8m^3}(4mr - \pi) \ \ldots\ldots. (628),$$

$$\int_0^\infty l\, Tg.\, rx\ \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{8m}(\pi + 4mr) \ \ldots\ldots. (629).$$

Enfin l'intégrale (601) fournit: $\int_0^{\infty} l\,Sin.\,rx.\ Si.(x)\ \frac{dx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\left\{(\tfrac{1}{2}\pi - mr)\ Si.(m) - \right.$ $\left. - Ci.(m).\ l2\right\}$ ... (630) [83].

34. Retournons aux théorèmes (LIV) à (LXXXVII) et appliquons-y les développements (p) à (u) du N°. 7; alors nous aurons: $f(\alpha) = e^{s}$, $f(\alpha+\beta e^{mri}) = e^{se^{mri}} =$ $= e^{s\,Cos.\,mr + si\,Sin.\,mr} = e^{s\,Cos.\,mr}\left\{Cos.(s\,Sin.\,mr) + i\,Sin.(s\,Sin.\,mr)\right\}$, d'où $f(\alpha+\beta e^{-mri}) =$ $= e^{s\,Cos.\,mr}\left\{Cos.(s\,Sin.\,mr) - i\,Sin.(s\,Sin.\,mr)\right\}$, $f(\alpha+\beta e^{-mr}) = e^{se^{-mr}}$, $\frac{d}{d\beta}.(\alpha+\beta e^{mri}) =$ $= \frac{d}{d\beta}.e^{\beta s e^{mri}} = e^{\beta s e^{mri}}{}_1\ s e^{mri} = s e^{mri + s(Cos.\,mr + i\,Sin.\,mr)} = s e^{s\,Cos.\,mr}\left\{Cos.(s\,Sin.\,mr + mr) + \right.$ $\left. + i\,Sin.(s\,Sin.\,mr + mr)\right\}$, d'où encore, en changeant le signe de i: $\frac{d}{d\beta}.(\alpha+\beta e^{-mri}) =$ $= s e^{s\,Cos.\,mr}\left\{Cos.(s\,Sin.\,mr + mr) - i\,Sin.(s\,Sin.\,mr + mr)\right\}$. Eu égard à toutes ces transformations, nous trouverons:

$\int_0^{\infty} e^{s\,Cos.\,rx}\ Cos.(s\,Sin.\,rx)\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ e^{s\,Cos.\,mr}\ Sin.(s\,Sin.\,mr)$ ... (632), $\int_0^{\infty} e^{s\,Cos.\,rx}$ $Sin.(s\,Sin.\,rx)\ \frac{x\,dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\left\{e^{s} - e^{s\,Cos.\,mr}\ Cos.(s\,Sin.\,mr)\right\}$ ... (633), $\int_0^{\infty} e^{s\,Cos.\,rx + s_1\,Cos.\,r_1 x + \dots}$ $Cos.(s\,Sin.\,rx + s_1\,Sin.\,r_1 x + \dots)\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ e^{s\,Cos.\,mr + s_1\,Cos.\,mr_1 + \dots}\ Sin.(s\,Sin.\,mr +$ $+ s_1\,Sin.\,mr_1 + \dots)$ ... (634), $\int_0^{\infty} e^{s\,Cos.\,rx + s_1\,Cos.\,r_1 x + \dots}\ Sin.(s\,Sin.\,rx + s_1\,Sin.\,r_1 x + \dots)\ \frac{x\,dx}{m^2-x^2} =$ $= \frac{\pi}{2}\left\{e^{s+s_1+\dots} - e^{s\,Cos.\,mr + s_1\,Cos.\,mr_1 + \dots}\ Cos.(s\,Sin.\,mr + s_1\,Sin.\,mr_1 + \dots)\right\}$ ... (635),

---

[83] Lorsqu'on soustrait les intégrales (630) et (621) on obtient:
$\int_0^{\infty} l\,Tg.\,rx.\ Si.(x)\ \frac{x\,dx}{m^2-x^2} = -\tfrac{1}{4}\pi^2\ Si.(m)$ ... (631).

Mais il faut observer encore, que les intégrales dont on traite dans ces Notes [80] à [83] auraient aussi pu être additionnées; de cette manière on aurait trouvé l'intégrale $\int_0^{\infty} l(Sin.\,rx.\ Cos.\,rx).\ f(x)\,dx$: quand on y ajoute l'intégrale toujours connue $\int_0^{\infty} l\,2.\ f(x)\,dx$, le résultat $\int_0^{\infty} l\,Sin.\ 2rx.\ f(x)\,dx$ n'est autre chose que l'intégrale $\int_0^{\infty} l\,Sin.\,rx.\ f(x)\,dx$ qu'on a employée, pour un r double: comme en effet il en est chaque fois ainsi, on pourra reconnaître par-là l'exactitude et la validité de nos résultats.

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Cos.(s Sin.\ rx)\ \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\ \{e^{se^{-mr}} + e^{s Cos. mr}\ Sin.(s Sin.\ mr)\}\ \ldots\ (636),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Cos.(s Sin.\ rx)\ \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m}\ \{e^{s Cos. mr}\ Sin.(s Sin.\ mr) - e^{se^{-mr}}\}\ \ldots\ (637),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Sin.(s Sin.\ rx)\ \frac{x dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\ \{e^{se^{-mr}} - e^{s Cos. mr}\ Cos.(s Sin. mr)\}\ \ldots\ (638),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Sin.(s Sin.\ rx)\ \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4}\ \{2 - e^{se^{-mr}} - e^{s Cos. mr}\ Cos.(s Sin.\ mr)\}\ \ldots\ (639),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}\ Cos.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \ldots)\ \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\ \{e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots} +$$

$$+ e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}\ Sin.(s Sin. mr + s_1 Sin. mr_1 + \ldots)\}\ \ldots\ (640),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}$$

$$Cos.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \ldots)\ \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m}\ \{e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}\ Sin.(s Sin.\ mr\ +$$

$$+ s_1 Sin. mr_1 + \ldots) - e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots}\}\ \ldots\ (641),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}\ Sin.(s Sin.\ rx\ +$$

$$+ s_1 Sin. r_1 x + \ldots)\ \frac{x dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\ \{e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots} - e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots} Cos.(s Sin. mr\ +$$

$$+ s_1 Sin. mr_1 + \ldots)\}\ \ldots\ (642),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}\ Sin.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \ldots)\ \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\ \{2 - e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \ldots} - e^{s Cos\ mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}\ Cos.(s Sin. mr + s_1 Sin. mr_1 + \ldots)\}\ \ldots\ (643),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Cos.(s Sin. rx)\ \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3}\ e^{s Cos. mr}\{Sin.(s Sin. mr) - smr Cos.(s Sin. mr + mr)\}\ (644),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Cos.(s Sin. rx)\ \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{-\pi}{4m}\ e^{s Cos. mr}\{Sin.(s Sin. mr) + smr Cos.(s Sin. mr + mr)\}\ (645),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Sin.(s Sin.\ rx)\ \frac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi s r}{4m}\ e^{s Cos. mr}\ Sin.(s Sin.\ mr + mr)\ \ldots\ldots\ (646),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Sin.(s Sin.\ rx)\ \frac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^3} = \frac{\pi}{4}\ \{2 e^{s Cos. mr}\ Cos.(s Sin.\ mr) - 2 - smr\ e^{s Cos. mr}$$

$$Sin.(s Sin. mr + mr)\}\ \ldots\ (647),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}\ Cos.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \ldots)\ \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4m^3}\ e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}\ [Sin.(s Sin.\ mr + s_1 Sin.\ mr_1 + \ldots) - m\{sr\ Cos.(s Sin.\ mr + mr)\ +$$

$$+ s_1 r_1\ Cos.(s_1 Sin.\ mr_1 + mr_1) + \ldots\}]\ \ldots\ (648),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}\ Cos.(s Sin.\ rx\ +$$

$$+ s_1 Sin. r_1 x + \ldots)\ \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = -\frac{\pi}{4m}\ e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}\ [Sin.(s Sin. mr + s_1 Sin. mr_1 + \ldots)\ +$$

$+\ m \left\{ sr\, Cos.(s Sin. mr+mr)+s_1 r_1 Cos.(s_1 Sin. mr_1+mr_1)+\ldots \right\} \big] \ \ldots\ (649),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}$

$Sin.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x+\ldots)\ \dfrac{x dx}{(m^2-x^2)^2} = \dfrac{\pi}{4m}\ e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots} \left\{ sr\, Sin.(s Sin. mr + mr) + \right.$

$\left. +\ s_1 r_1\ Sin.(s_1\ Sin.\ mr_1 + mr_1)+\ldots \right\}\ \ldots\ (650),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}\ Sin.(s\ Sin.\ rx\ +$

$+\ s_1 Sin. r_1 x+\ldots)\ \dfrac{x^3 dx}{(m^2-x^2)^2} = \dfrac{\pi}{4}\ (e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}\ [2\, Cos.(s Sin. mr + s_1\ Sin. mr_1+\ldots)\ -$

$-\ m \left\{ sr\ Sin.(s\ Sin.\ mr + mr) + s_1 r_1\ Sin.(s_1\ Sin.\ mr_1 + mr_1)+\ldots \right\}] - 2)\ \ldots\ldots\ldots\ (651),$

$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Cos.(s Sin. rx).\ Si.(x)\ \dfrac{x dx}{m^2-x^2} = \dfrac{\pi}{2}\ \left\{ e^{s Cos. mr}\ Sin.(s Sin. mr).\ Si.(m) - Ci.(m) \right\}\ (652),$

$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Sin.(s Sin.\ rx).\ Si.(x)\ \dfrac{dx}{m^2-x^2} = \dfrac{\pi}{2m}\ Si.(m).\ \left\{ 1 - e^{s Cos. mr}\ Cos.(s Sin.\ mr) \right\}\ (653),$

$\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}\ Cos.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x+\ldots).\ Si.(x)\ \dfrac{x dx}{m^2-x^2} = \dfrac{\pi}{2}\ [e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}$

$Sin.(s Sin. mr + s_1 Sin. mr_1+\ldots).\ Si.(m) - Ci.(m)]\ \ldots\ (654),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}\ Sin.(s Sin. rx +$

$+\ s_1 Sin. r_1 x+\ldots).\ Si.(x)\ \dfrac{dx}{m^2-x^2} = \dfrac{\pi}{2m}\ Si.(m).\ \left\{ 1 - e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}\ Cos.(s Sin.\ mr\ + \right.$

$\left. +\ s_1\ Sin.\ mr_1+\ldots) \right\}\ \ldots\ (655).$

35. Les intégrales qu'on vient de trouver au dernier Numéro peuvent être soumises à la différentiation par rapport à la constante s sous le signe d'intégration: procédé que l'on a exposé au N°. 9. C'est ainsi qu'on trouve:

$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Cos.(s\ Sin.\ rx + rx)\ \dfrac{dx}{m^2-x^2} = \dfrac{\pi}{2m}\ e^{s Cos. mr}\ Sin.(s\ Sin.\ mr + mr)\ \ldots\ (656),$

$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Sin.(s\ Sin.\ rx + rx)\ \dfrac{x dx}{m^2-x^2} = -\ \dfrac{\pi}{2}\ e^{s Cos. mr}\ Cos.(s\ Sin.\ mr + mr)\ \ldots\ (657),$

$\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x \ldots}\ Cos.(s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x+\ldots + r_a x)\ \dfrac{dx}{m^2-x^2} = \dfrac{\pi}{2m}\ e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}$

$Sin.(s\ Sin.\ mr + s_1\ Sin.\ mr_1+\ldots + mr_a)\ \ldots\ (658),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}\ Sin.(s\ Sin.\ rx\ +$

$+\ s_1\ Sin.\ r_1 x+\ldots + r_a x)\ \dfrac{x dx}{m^2-x^2} = -\ \dfrac{\pi}{2}\ e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}\ Cos.(s\ Sin.\ mr\ +$

$+\ s_1\ Sin.\ mr_1+\ldots + mr_a)\ \ldots\ldots\ldots\ (659),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx}\ Cos.(s\ Sin.\ rx + rx)\ \dfrac{dx}{m^4-x^4} =$

$= \dfrac{\pi}{4m^2}\ \left\{ e^{ss^{-mr}-mr} + e^{s Cos. mr}\ Sin.(s\ Sin.\ mr + mr) \right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (660),\ \int_0^\infty e^{s Cos. rx}$

$\mathrm{Cos.}(s\,\mathrm{Sin.}\,rx + rx)\ \frac{x^2dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m}\ \Big\{ e^{s\mathrm{Cos.}mr}\,\mathrm{Sin.}(s\,\mathrm{Sin.}\,mr + mr) - e^{se^{-mr}-mr} \Big\} \ldots (661),$

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\,\mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}\,rx + rx)\,\frac{xdx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\ \Big\{ e^{se^{-mr}-mr} - e^{s\mathrm{Cos.}mr}\,\mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\,mr + mr) \Big\} \ldots (662),$

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\,\mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}\,rx + rx)\,\frac{x^3dx}{m^4 - x^4} = -\frac{\pi}{4}\ \Big\{ e^{se^{-mr}-mr} + e^{s\mathrm{Cos.}mr}\,\mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\,mr + mr) \Big\} \ldots (663),$

$\int_0^\infty e^{s\,\mathrm{Cos.}\,rx + s_1\mathrm{Cos.}\,r_1x + \ldots}\ \mathrm{Cos.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ rx\ +\ s_1\ \mathrm{Sin.}\ r_1x + \ldots + r_ax)\ \ \frac{dx}{m^4 - x^4}\ =$

$= \ \frac{\pi}{4m^3}\ \ \Big\{ e^{se^{-mr} + s_1e^{-mr_1} + \ldots - mr_a}\ +\ e^{s\,\mathrm{Cos.}\ mr + s_1\,\mathrm{Cos.}\ mr_1 + \ldots}\ \ \mathrm{Sin.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ mr\ +$

$+\ s_1\mathrm{Sin.}\ mr_1 + \ldots + mr_a)\Big\}\ \ldots\ldots\ldots\ (664),\ \int_0^\infty e^{s\,\mathrm{Cos.}\,rx + s_1\mathrm{Cos.}\,r_1x + \ldots}\ \ \mathrm{Cos.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ rx\ +$

$+\ s_1\mathrm{Sin.}\ r_1x + \ldots + r_ax)\ \frac{x^2dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m}\ \Big\{ e^{s\mathrm{Cos.}\,mr + s_1\mathrm{Cos.}\,mr_1 + \ldots}\,\mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}mr + s_1\mathrm{Sin.}mr_1 + \ldots +$

$+\ mr_a)\ -\ e^{se^{-mr} + s_1e^{-mr_1} + \ldots - mr_a}\Big\}\ \ldots\ (665),\ \int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}\,rx + s_1\mathrm{Cos.}\,r_1x + \ldots}\ \mathrm{Sin.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\,rx\ +$

$+\ s_1\mathrm{Sin.}\,r_1x + \ldots + r_ax)\ \frac{xdx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\ \ \Big\{ e^{se^{-mr} + s_1e^{-mr_1} + \ldots - mr_a} - e^{s\mathrm{Cos.}\,mr + s_1\mathrm{Cos.}\,mr_1 + \ldots}$

$\mathrm{Cos.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\,mr\ +\ s_1\mathrm{Sin.}\,mr_1 + \ldots + mr_a)\Big\}\ \ldots\ (666),\ \int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}\,rx + s_1\mathrm{Cos.}\,r_1x + \ldots}\ \mathrm{Sin.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\,rx\ +$

$+\ s_1\mathrm{Sin.}\,r_1x + \ldots + r_ax)\ \frac{x^3dx}{m^4 - x^4} = -\ \frac{\pi}{4}\ \Big\{ e^{se^{-mr} + s_1e^{-mr_1} + \ldots - mr_a} + e^{s\mathrm{Cos.}\ mr + s_1\mathrm{Cos.}\ mr_1 + \ldots}$

$\mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\,mr + s_1\mathrm{Sin.}\,mr_1 + \ldots + mr_a)\Big\}\ \ldots\ (667),\ \int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\,\mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}rx + rx)\ \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} =$

$= \frac{\pi}{4m^3}\,e^{s\mathrm{Cos.}\,mr}\,\Big\{ \mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}\,mr + mr) - mr\,\mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\,mr + mr) - smr\,\mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\,mr + 2mr) \Big\} \ldots (668),$

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}\,rx}\ \ \mathrm{Cos.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ rx\ +\ rx)\ \ \frac{x^2dx}{(m^2 - x^2)^2}\ =\ \frac{-\pi}{4m}\ \ e^{s\mathrm{Cos.}\,mr}\ \ \Big\{ \mathrm{Sin.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ mr\ +\ mr)\ +$

$+\ \ mr\ \ \mathrm{Cos.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ mr\ +\ mr)\ \ +\ \ smr\ \ \mathrm{Cos.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ mr\ +\ 2mr)\Big\}\ \ldots\ldots\ldots\ (669),\ \int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}\,rx}$

$\mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}rx + rx)\ \frac{xdx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi r}{2m}\,e^{s\mathrm{Cos.}mr}\,\Big\{ \mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}\,mr + mr) + s\mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}\,mr + 2mr) \Big\} \ldots (670),$

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}\,rx}\ \ \mathrm{Sin.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ rx\ +\ rx)\ \ \frac{x^3dx}{(m^2 - x^2)^2}\ =\ \frac{\pi}{4}\ \ e^{s\mathrm{Cos.}\,mr}\ \ \Big\{ 2\ \mathrm{Cos.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ mr\ +\ mr)\ -$

$-\ mr\ \mathrm{Sin.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ mr + mr)\ -\ smr\ \mathrm{Sin.}\,(s\,\mathrm{Sin.}\ mr + 2mr)\Big\}\ \ldots\ (671),\ \int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}\,rx + s_1\mathrm{Cos.}\,r_1x + \ldots}$

$\mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\ rx + s_1\mathrm{Sin.}\,r_1x + \ldots + r_ax)\ \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3}\ e^{s\mathrm{Cos.}\ mr + s_1\mathrm{Cos.}\ mr_1 + \ldots}\,\Big[\mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}\,mr +$

$+ s_1 Sin. mr_1 + \ldots + mr_a) - m\, Cos. mr_a. \{ sr\, Cos. (s Sin. mr + mr) + s_1 r_1 Cos. (s_1 Sin. mr_1 + mr_1) + \ldots \} -$
$- mr_a \{ Cos. (s_a Sin. mr_a + mr_a) - s_a Sin. (s_a Sin. mr_a + mr_a). Sin. mr_a \}] \ldots (672)$, $\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}$
$Cos. (s Sin. rx + s_1 Sin. r_1 x + \ldots + r_a x) \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = - \frac{\pi}{4m} e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots} [Sin. (s Sin. mr +$
$+ s_1 Sin. mr_1 + \ldots + mr_a) + m\, Cos. mr_a. \{ sr Cos. (s Sin. mr + mr) + s_1 r_1 Cos. (s_1 Sin. mr_1 + mr_1) + \ldots \} +$
$+ mr_a \{ Cos. (s_a Sin. mr_a + mr_a) - r_a Sin. (s_a Sin. mr_a + mr_a). Sin. mr_a \}] \ldots (673)$, $\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots}$
$Sin. (s Sin.\ rx + s_1 Sin.\ r_1 x + \ldots + r_a x) \frac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4m} e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots}$
$[Cos. mr_a. \{ sr\, Sin. (s Sin. mr + mr) + s_1 r_1 Sin. (s_1 Sin. mr_1 + mr_1) + \ldots \} + r_a Sin. (s_a Sin. mr_a + mr_a) +$
$+ s_a r_a Cos. (s_a Sin.\ mr_a + mr_a).\ Sin.\ mr_a] \ldots (674)$, $\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots} Sin. (s Sin.\ rx +$
$+ s_1 Sin.\ r_1 x + \ldots + r_a x) \frac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4} e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots} [2\, Cos. (s Sin. mr +$
$+ s_1 Sin. mr_1 + \ldots + mr_a) - m\, Cos. mr_a. \{ sr Sin. (s Sin. mr + mr) + s_1 r_1 Sin. (s_1 Sin. mr_1 + mr_1) + \ldots \} -$
$- mr_a \{ Sin. (s_a Sin.\ mr_a + mr_a) + s_a Cos. (s_a Sin.\ mr_a + mr_a).\ Sin.\ mr_a] \ldots (675)$, $\int_0^\infty e^{s Cos. rx}$
$Cos. (s Sin. rx + rx).\ Si. (x) \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} e^{s Cos. mr} Sin. (s Sin. mr + mr).\ Si. (m) \ldots (676)$,
$\int_0^\infty e^{s Cos. rx} Sin. (s Sin. rx + rx). Si. (x) \frac{dx}{m^2 - x^2} = - \frac{\pi}{2m} e^{s Cos. mr} Cos. (s Sin. mr + mr). Si. (m) \ldots (677)$,
$\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots} Cos. (s Sin.\ rx + s_1 Sin.\ r_1 x + \ldots + r_a x).\ Si. (x) \frac{x dx}{m^2 - x^2} =$
$= \frac{\pi}{2} e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots} Sin. (s Sin.\ mr + s_1 Sin.\ mr_1 + \ldots + mr_a).\ Si. (m) \ldots (678)$,
$\int_0^\infty e^{s Cos. rx + s_1 Cos. r_1 x + \ldots} Sin. (s Sin.\ rx + s_1 Sin.\ r_1 x + \ldots + r_a x).\ Si. (x) \frac{dx}{m^2 - x^2} =$
$= - \frac{\pi}{2m} e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \ldots} Cos. \{ s Sin.\ mr + s_1 Sin.\ mr_1 + \ldots + mr_a \}.\ Si. (m) \ldots (679)$.

Observons au sujet de ces intégrales qu'il n'est pas nécessaire en général que la constante r_a se trouve parmi les r de l'exponentielle, bien que telle en ait été l'origine; seulement il faut excepter ici les intégrales (672) à (675) qui contiennent encore dans leur valeur la constante s_a elle-même. Il est vrai qu'on peut l'annuler et rendre ainsi la valeur plus simple, mais alors aussi cet s_a ne peut plus se trouver dans l'exponentielle. Quand on préfère ne pas l'en bannir, les formules, ayant la forme que nous leur avons donnée, permettent une simplification

après que nous les aurons écrites tout entières dans chaque cas spécial; car alors à chaque terme qui se trouve le dernier entre les crochets, il en correspond un autre analogue à facteur $s_a r_a$, de telle nature qu'ils se laissent réunir dans un seul terme $s_a r_a \, Cos.(s_a \, Sin.\, mr_a + 2\,mr_a)$ ou $s_a r_a \, Sin.(s \, Sin.\, mr_a + 2mr_a)$, comme on en rencontre dans les quatre intégrales précédentes (668) à (671).

36. Passons aux développements (v) à (ac) du N°. 10; mais ne nous servons que des deux dernières formules, vu qu'elles comprennent les deux autres couples comme cas particuliers. Pour cette supposition on trouve en doublant de suite tous les p et tous les r: $f(\alpha) = 1$, $f(\alpha+\beta\, e^{-mr}) = (1+e^{-2mp})^q \, (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s \, (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots \; e^{te^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \ldots}$, $f(\alpha+\beta\, e^{mri}) = (1+e^{2mpi})^q \, (1+e^{2mp_1 i})^{q_1} \ldots (1-e^{2mri})^s \, (1-e^{2mr_1 i})^{s_1} \ldots e^{te^{-mui} + t_1 e^{-mu_1 i} + \ldots} = (2\,Cos.\, mp)^q . (2\,Cos.\, mp_1)^{q_1} \ldots (2\,Sin.\, mr)^s . \, (2\,Sin.\, mr_1)^{s_1} \ldots \; e^{t\,Cos.\, mu + t_1\, Cos.\, mu_1 + \ldots} \; [Cos.\{(s+s_1+\ldots)\,\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots)\, m - t\, Sin.\, mu - t_1\, Sin.\, mu_1 - \ldots\} + i\, Sin.\{s+s_1+\ldots)\,\frac{1}{2}\pi - (qp+q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots)\, m - t\, Sin.\, mu - t_1\, Sin.\, mu_1 - \ldots\}]$, où on n'a qu'à changer i en $-i$ pour avoir $f(\alpha+\beta\, e^{-mri})$. Puis $[\Sigma \frac{d}{d\beta}]\, f(\alpha+\beta\, e^{mri}) = (2\,Cos.\, mp)^q . (2\,Cos.\, mp_1)^{q_1} \ldots (2\,Sin.\, mr)^s . (2\,Sin.\, mr_1)^{s_1} \ldots e^{t\,Cos.\, mu + t_1\, Cos.\, mu_1 + \ldots} (m \Sigma\, qp\, Sec.\, mp . [Cos.\{(q+1)mp\} + i\, Sin.\{(q+1)mp\}] + m\Sigma\, sr\, Cosec.\, mr. \; [Cos.\{(s-1)\,\frac{1}{2}\pi - (s+1)\, mr\} - i\, Sin.\{(s-1)\,\frac{1}{2}\pi - (s+1)\, mr\}] + \Sigma\, tu\, [Cos.(t\, Sin.\, mu + mu) + i\, Sin.(t\, Sin.\, mu + mu)])$, tandis qu'il y faut changer le signe de i pour avoir $[\Sigma \frac{d}{d\beta}]\, f(\alpha+\beta\, e^{-mri})$.

Lorsqu'on a égard à ces considérations, on trouve successivement:

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t\,Cos.\, ux + t_1\, Cos.\, u_1 x + \ldots} \; Cos.\{(s+s_1+\ldots)\,\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots)\, x - t\, Sin.\, ux - t_1\, Sin.\, u_1 x - \ldots\} \; \frac{dx}{m^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2m} \; Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1 \ldots \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 \ldots \; e^{t\,Cos.\, mu + t_1\, Cos.\, mu_1 + \ldots} \; Sin.\{(s+s_1+\ldots)\,\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots)m - t\, Sin.\, mu - t_1\, Sin.\, mu_1 - \ldots\} \; \ldots\ldots \; (680),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \ldots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t\,Cos.\, ux + t_1\, Cos.\, u_1 x + \ldots} \; Sin.\{(s+s_1+\ldots)\,\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots)\, x - t\, Sin.\, ux - t_1\, Sin.\, u_1 x - \ldots\} \; \frac{x\,dx}{m^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \; [2 - q - q_1 - \ldots - s - s_1 - \ldots \; - \; Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1 \ldots \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 \ldots \; e^{t\,Cos.\, mu + t_1\, Cos.\, mu_1 + \ldots}$$

$Cos.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m-t\,Sin.\,mu-t_1\,Sin.\,mu_1-\dots\}]\;\dots\;(681),$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\; Cos.^{q_1}p_1x\dots\; Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1}r_1x\dots\; e^{t\,Cos.\,ux+t_1\,Cos.\,u_1x+\dots}\; Cos.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$$

$$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x-t\,Sin.\,ux-t_1\,Sin.\,u_1x-\dots\}\frac{dx}{m^4-x^4}=$$

$$=\frac{\pi}{4m^3}[2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots}(1+e^{-2mp})^q(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots$$

$$e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots}+Cos.^q mp.\; Cos.^{q_1}mp_1\dots\; Sin.^s mr.\; Sin.^{s_1}mr_1\dots\; e^{t\,Cos.\,mu+t_1\,Cos.\,mu_1+\dots}$$

$Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m-t\,Sin.\,mu-t_1\,Sin.\,mu_1-\dots\}]\;\dots\;(682),$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\; Cos.^{q_1}p_1x\dots\; Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1}r_1x\dots\; e^{t\,Cos.\,ux+t_1\,Cos.\,u_1x+\dots}\; Cos.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$$

$$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x-t\,Sin.\,ux-t_1\,Sin.\,u_1x-\dots\}\frac{x^2dx}{m^4-x^4}=$$

$$=\frac{\pi}{4m}[Cos.^q mp.\; Cos.^{q_1}mp_1\dots\; Sin.^s mr.\; Sin.^{s_1}mr_1\dots\; e^{t\,Cos.\,mu+t_1\,Cos.\,mu_1+\dots}\; Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$$

$$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m-t\,Sin.\,mu-t_1\,Sin.\,mu_1-\dots\}-2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots}$$

$(1+e^{-2mp})^q(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots}]\;\dots\;(683),$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\; Cos.^{q_1}p_1x\dots\; Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1}r_1x\dots\; e^{t\,Cos.\,ux+t_1\,Cos.\,u_1x+\dots}\; Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$$

$$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x-t\,Sin.\,ux-t_1\,Sin.\,u_1x-\dots\}\frac{x\,dx}{m^4-x^4}=$$

$$=\frac{\pi}{4m^2}[2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots}(1+e^{-2mp})^q(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots$$

$$e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots}-Cos.^q mp.\; Cos.^{q_1}mp_1\dots\; Sin.^s mr.\; Sin.^{s_1}mr_1\dots\; e^{t\,Cos.\,mu+t_1\,Cos.\,mu_1+\dots}$$

$Cos.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m-t\,Sin.\,mu-t_1\,Sin.\,mu_1-\dots\}]\;\dots\;(684),$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\; Cos.^{q_1}p_1x\dots\; Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1}r_1x\dots\; e^{t\,Cos.\,ux+t_1\,Cos.\,u_1x+\dots}\; Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$$

$$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x-t\,Sin.\,ux-t_1\,Sin.\,u_1x-\dots\}\frac{x^3dx}{m^4-x^4}=$$

$$=\frac{\pi}{4}[2-2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots}(1+e^{-2mp})^q(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots$$

$$e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots}-Cos.^q mp.\; Cos.^{q_1}mp_1\dots\; Sin.^s mr.\; Sin.^{s_1}mr_1\dots\; e^{t\,Cos.\,mu+t_1\,Cos.\,mu_1+\dots}$$

$Cos.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m-t\,Sin.\,mu-t_1\,Sin.\,mu_1-\dots\}]\;\dots\;(685),$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\; Cos.^{q_1}p_1x\dots\; Sin.^s rx.\; Sin.^{s_1}r_1x\dots\; e^{t\,Cos.\,ux+t_1\,Cos.\,u_1x+\dots}\; Cos.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-$$

$$-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x-t\,Sin.\,ux-t_1\,Sin.\,u_1x-\dots\}\frac{dx}{(m^2-x^2)^2}=$$

$$= \frac{\pi}{4m^3} \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \dots \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \dots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,mu + t_1\,\mathrm{Cos.}\,mu_1 + \dots} [\mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m - t\,\mathrm{Sin.}\,mu - t_1\,\mathrm{Sin.}\,mu_1 - \dots\} - m(qp\,\mathrm{Cos.}\{(q+1)mp\}.\,\mathrm{Sec.}\,mp + q_1p_1\,\mathrm{Cos.}\{(q_1+1)mp_1\}.\,\mathrm{Sec.}\,mp_1 + \dots + sr\,\mathrm{Cos.}\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mr\}.\,\mathrm{Cosec.}\,mr + s_1r_1\,\mathrm{Cos.}\{(s_1-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s_1+1)mr_1\}.\,\mathrm{Cosec.}\,mr_1 + \dots + tu\,\mathrm{Cos.}(t\,\mathrm{Sin.}\,mu + mu) + t_1u_1\,\mathrm{Cos.}(t_1\,\mathrm{Sin.}\,mu_1 + mu_1) + \dots)] \quad \dots (686),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1x \dots \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1x \dots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,ux + t_1\,\mathrm{Cos.}\,u_1x + \dots} \mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\mathrm{Sin.}\,ux - t_1\,\mathrm{Sin.}\,u_1x - \dots\} \frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{\pi}{4m} \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \dots \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \dots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,mu + t_1\,\mathrm{Cos.}\,mu_1 + \dots} [\mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\mathrm{Sin.}\,mu - t_1\,\mathrm{Sin.}\,mu_1 - \dots\} + m(qp\,\mathrm{Cos.}\{(q+1)mp\}.\,\mathrm{Sec.}\,mp + q_1p_1\,\mathrm{Cos.}\{(q_1+1)mp_1\}.\,\mathrm{Sec.}\,mp_1 + \dots + sr\,\mathrm{Cos.}\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mr\}.\,\mathrm{Cosec.}\,mr + s_1r_1\,\mathrm{Cos.}\{(s_1-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s_1+1)mr_1\}.\,\mathrm{Cosec.}\,mr_1 + \dots + tu\,\mathrm{Cos.}(t\,\mathrm{Sin.}\,mu + mu) + t_1u_1\,\mathrm{Cos.}(t_1\,\mathrm{Sin.}\,mu_1 + mu_1) + \dots)] \quad \dots (687),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1x \dots \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1x \dots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,ux + t_1\,\mathrm{Cos.}\,u_1x + \dots} \mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\mathrm{Sin.}\,ux - t_1\,\mathrm{Sin.}\,u_1x - \dots\} \frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{2m} \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \dots \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \dots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,mu + t_1\,\mathrm{Cos.}\,mu_1 + \dots} [qp\,\mathrm{Sin.}\{(q+1)mp\}.\,\mathrm{Sec.}\,mp + q_1p_1\,\mathrm{Sin.}\{(q_1+1)mp_1\}.\,\mathrm{Sec.}\,mp_1 + \dots + sr\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mr\}.\,\mathrm{Cosec.}\,mr + s_1r_1\,\mathrm{Sin.}\{(s_1-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s_1+1)mr_1\}.\,\mathrm{Cosec.}\,mr_1 + \dots + tu\,\mathrm{Sin.}(t\,\mathrm{Sin.}\,mu + mu) + t_1u_1\,\mathrm{Sin.}(t_1\,\mathrm{Sin.}\,mu_1 + mu_1) + \dots] \quad \dots (688),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1x \dots \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1x \dots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,ux + t_1\,\mathrm{Cos.}\,u_1x + \dots} \mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\mathrm{Sin.}\,ux - t_1\,\mathrm{Sin.}\,u_1x - \dots\} \frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4} [\mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \dots \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \dots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,mu + t_1\,\mathrm{Cos.}\,mu_1 + \dots} (\mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m - t\,\mathrm{Sin.}\,mu - t_1\,\mathrm{Sin.}\,mu_1 - \dots\} - m[qp\,\mathrm{Sin.}\{(q+1)mp\}.\,\mathrm{Sec.}\,mp + q_1p_1\,\mathrm{Sin.}\{(q_1+1)mp_1\}.\,\mathrm{Sec.}\,mp_1 + \dots + sr\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mr\}.\,\mathrm{Cosec.}\,mr + s_1r_1\,\mathrm{Sin.}\{(s_1-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s_1+1)mr_1\}.\,\mathrm{Cosec.}\,mr_1 + \dots + tu\,\mathrm{Sin.}(t\,\mathrm{Sin.}\,mu + mu) + t_1u_1\,\mathrm{Sin.}(t_1\,\mathrm{Sin.}\,mu_1 + mu_1) + \dots]) - 2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots}] \quad \dots (689),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1x \dots \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1x \dots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,ux + t_1\,\mathrm{Cos.}\,u_1x + \dots} \mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\mathrm{Sin.}\,ux - t_1\,\mathrm{Sin.}\,u_1x - \dots\}.\ \mathrm{Si.}(x)\ \frac{xdx}{m^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} [\mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \dots \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \dots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,mu + t_1\,\mathrm{Cos.}\,mu_1 + \dots} \mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t\,\mathrm{Sin.}\,mu - t_1\,\mathrm{Sin.}\,mu_1 - \dots\}.\ \mathrm{Si.}(m) -$$

$$- 2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots} \, Ci.(m)] \dots (690), \int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \dots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \dots$$
$$e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \dots} \, Sin. \left\{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)x - t \, Sin. \, ux - \right.$$
$$\left. - t_1 Sin. \, u_1 x - \dots \right\}. \; Si.(x) \, \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \, Si.(m). \; [2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots} - Cos.^q mp.$$
$$Cos.^{q_1} mp_1 \dots \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 \dots \; e^{t Cos. mu + t_1 Cos. mu_1 + \dots} \, Cos. \left\{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+ \right.$$
$$\left. + sr+s_1r_1+\dots)m - t \, Sin. \, mu - t_1 Sin. \, mu_1 - \dots \right\}] \dots (691).$$

Nous pouvons observer à l'égard de ces formules qu'elles contiennent trois sortes différentes de fonctions $Cos.^q px$, $Sin.^s rx$, $e^{t Cos. ux}$; — qu'il n'est pas nécessaire qu'elles y soient présentes toutes à la fois, de sorte que par l'annulation des s, des q, ou des t, nous en déduirons des intégrales, où il se trouve respectivement des combinaisons des facteurs $Cos.^q px$ avec les autres $e^{t Cos. ux}$, des $Sin.^s rx$ avec les $e^{t Cos. ux}$ et enfin des $Cos.^q px$ avec les $Sin.^s rx$: or, ces dernières formules, nous les avons trouvées déjà du N°. 32; — et enfin que dans chacune de ces trois catégories, on peut prendre un nombre absolument arbitraire de fonctions. Encore pourrions-nous les différentier par rapport aux constantes qu'elles contiennent, pourvu que toutefois nous ayons égard aux observations faites plus haut à l'égard des cas d'exception, qui se présentent quelquefois. Il nous mènerait trop loin d'entreprendre ici tous ces calculs, quoique les résultats ne fussent pas dénués d'intérêt: mais nous nous contenterons maintenant d'un seul cas, qui donne lieu ensuite à des formules très-simples et non moins remarquables.

37. C'est-à-dire, nous introduirons dans la quantité polynôme, sous les signes trigonométriques *Cosinus* ou *Sinus*, un terme de la forme $u_a x$, qui ne dépend nullement des constantes q, p, s, r: ce qui aura lieu par suite de la différentiation des formules acquises au dernier Numéro par rapport à un t_a, qu'on pourra considérer ensuite comme ayant disparu. Ce procédé, employé déjà avec succès dans les paragraphes précédents, ne nous servira pas moins bien ici, et nous conduira à des résultats nouveaux quoique très-simples, par l'intermédiaire de quelques suppositions propres à simplifier les formules pour la plupart très-générales.

Or, nous aurons:

$$\int_0^\infty Cos.^q px. \; Cos.^{q_1} p_1 x \dots \; Sin.^s rx. \; Sin.^{s_1} r_1 x \dots \; e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \dots} \, Cos. \left\{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - \right.$$
$$\left. - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x - t \, Sin. \, ux - t_1 Sin. \, u_1 x - \dots \right\} \frac{dx}{m^2 - x^2} =$$
$$= \frac{\pi}{2m} Cos.^q mp. \; Cos.^{q_1} mp_1 \dots \; Sin.^s mr. \; Sin.^{s_1} mr_1 \dots \; e^{t Cos. ux + t_1 Cos. u_1 x + \dots} \, Sin. \left\{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - \right.$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_0) m - t \, \mathrm{Sin.}\, mu - t_1 \, \mathrm{Sin.}\, mu_1 - \ldots \big\} \; \ldots \; (692),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1 x \ldots \; \mathrm{Sin.}^s rx. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots \; e^{t \mathrm{Cos.}\, ux + t_1 \mathrm{Cos.}\, u_1 x + \ldots} \; \mathrm{Sin.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_0) x - t \, \mathrm{Sin.}\, ux - t_1 \, \mathrm{Sin.}\, u_1 x - \ldots \big\} \; \frac{x dx}{m^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \; \mathrm{Cos.}^q mp. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \ldots \; \mathrm{Sin.}^s mr. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \ldots \; e^{t \mathrm{Cos.}\, mu + t_1 \mathrm{Cos.}\, mu_1 + \ldots} \; \mathrm{Cos.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$$

$$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_0) m - t \, \mathrm{Sin.}\, mu - t_1 \, \mathrm{Sin.}\, mu_1 - \ldots \big\} \; \ldots \; (693), \; [84]$$

---

[84] Pour montrer ici comment ces résultats généraux mènent à diverses intégrales spéciales, annulons d'abord tous les t et nous obtiendrons, en écrivant désormais u au lieu de u_0:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1 x \ldots \; \mathrm{Sin.}^s rx. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots \; \mathrm{Cos.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots +$$

$$+ sr + s_1 r_1 + \ldots + u) x \big\} \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = - \frac{\pi}{2m} \; \mathrm{Cos.}^q mp. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \ldots \; \mathrm{Sin.}^s mr. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \ldots$$

$$\mathrm{Sin.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u) m \big\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (694),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1 x \ldots \; \mathrm{Sin.}^s rx. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots \; \mathrm{Sin.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots +$$

$$+ sr + s_1 r_1 + \ldots + u) x \big\} \; \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \; \mathrm{Cos.}^q mp. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \ldots \; \mathrm{Sin.}^s mr. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \ldots$$

$$\mathrm{Cos.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u) m \big\} \; \ldots\ldots \; (695).$$

On peut simplifier ces formules tout de suite en y faisant $qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u = t$, où alors ce t, qui n'a aucune relation avec le t du texte, doit être plus grand que $qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots$, vu que toutes les constantes q, p, s, r, u sont supposées positives. Dès-lors on a:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1 x \ldots \; \mathrm{Sin.}^s rx. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots \; \mathrm{Cos.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - tx \big\} \; \frac{dx}{m^2 - x^2} =$$

$$= - \frac{\pi}{2m} \; \mathrm{Cos.}^q mp. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \ldots \; \mathrm{Sin.}^s mr. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \ldots \; \mathrm{Sin.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - mt \big\} \; \ldots \; (696),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1 x \ldots \; \mathrm{Sin.}^s rx. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots \; \mathrm{Sin.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - tx \big\} \; \frac{x dx}{m^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \; \mathrm{Cos.}^q mp. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \ldots \; \mathrm{Sin.}^s mr. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \ldots \; \mathrm{Cos.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - mt \big\} \; \ldots \; (697).$$

Maintenant faisons d'abord tous les s et ensuite tous les q égaux à zéro, nous aurons:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1 x \ldots \; \mathrm{Cos.}\, tx \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \; \mathrm{Cos.}^q mp. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \ldots \; \mathrm{Sin.}\, mt \; \ldots \; (698),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1 x \ldots \; \mathrm{Sin.}\, tx \frac{x dx}{m^2 - x^2} = - \frac{\pi}{2} \mathrm{Cos.}^q mp. \; \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \ldots \; \mathrm{Cos.}\, mt \, . \; (699), \; (t > qp + q_1 p_1 + \ldots),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^s rx. \; \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots \; \mathrm{Cos.} \big\{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - tx \big\} \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = - \frac{\pi}{2m} \; \mathrm{Sin.}^s mr.$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \dots\ e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \dots}\ Cos. \left\{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - \right.$$

$$\left. - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x - t\, Sin.\, ux - t_1 Sin.\, u_1 x - \dots \right\} \frac{dx}{m^4-x^4} =$$

$$= \frac{\pi}{4m^3} \left[2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots} (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \dots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \dots \right.$$

$$e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-mu_a} - Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \dots\ Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \dots\ e^{t Cos.\, mu + t_1 Cos.\, mu_1 + \dots}$$

$$\left. Sin. \left\{ (s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)m - t\, Sin.\, mu - t_1 Sin.\, mu_1 - \dots \right\} \right] \dots (706),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \dots\ e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \dots}\ Cos. \left\{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - \right.$$

$$\left. - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x - t\, Sin.\, ux - t_1 Sin.\, u_1 x - \dots \right\} \frac{x^2dx}{m^4-x^4} =$$

$$= -\frac{\pi}{4m} \left[Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \dots\ Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \dots\ e^{t Cos.\, mu + t_1 Cos.\, mu_1 + \dots}\ Sin. \left\{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - \right. \right.$$

$$\left. - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)m - t\, Sin.\, mu - t_1 Sin.\, mu_1 - \dots \right\} + 2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots}$$

$$\left. (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \dots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \dots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-mu_a} \right] \dots (707),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \dots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \dots\ e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \dots}\ Sin. \left\{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - \right.$$

$$\left. - (qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x - t\, Sin.\, ux - t_1 Sin.\, u_1 x - \dots \right\} \frac{xdx}{m^4-x^4} =$$

$Sin.^{s_1} mr_1 \dots\ Sin. \left\{ (s+s_1+\dots) \tfrac{1}{2}\pi - mt \right\}$ .... (700),

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \dots\ Sin. \left\{ (s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - tx \right\} \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2} Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \dots$ $Cos. \left\{ (s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi - mt \right\}$ ... (701), ($t > sr + s_1 r_1 + \dots$). Enfin bornons-nous à un seul facteur $Cos.^q px$ ou $Sin.^s rx$, et nous trouverons:

$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.\ tx\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} Cos.^q mp.\ Sin.\ mt$ .... (702),

$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Sin.\ tx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2} Cos.^q mp.\ Cos.\ mt$ .... (703), ($t > qp$),

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\ \frac{dx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2m} Sin.^s mr.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - mt)$ .... (704),

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2} Sin.^s mr.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - mt)$ ... (705), ($t > sr$).

Les conditions, auxquelles t est soumis, résultent de celles que nous avons vues valoir pour les intégrales (696) et (697). Et nous voilà parvenus enfin à des intégrales simples, de grand intérêt, que j'ai déduites de tout autre manière dans l'Exposé de la théorie etc. (Tome VIII des Verhand. der Kon. Akademie van Wetenschappen), Troisième Partie, Méthode 28, N°. 17.

$$= \frac{\pi}{4m^3}\left[-2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots}(1+e^{-2mp})^q(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots\right.$$
$$e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-mu_a} + Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \dots Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \dots e^{t Cos.\, mu + t_1 Cos.\, mu_1 + \dots}$$
$$\left. Cos.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)m-t\,Sin.\,mu-t_1\,Sin.\,mu_1-\dots\right\}\right] \dots (708),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x\dots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1x\dots e^{t Cos.\, ux+t_1 Cos.\, u_1x+\dots}\ Sin.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+\right.$$
$$\left.+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x-t\,Sin.\,ux-t_1\,Sin.\,u_1x-\dots\right\}\frac{x^3dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4}\left[2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots}\right.$$
$$(1+e^{-2mp})^q(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-mu_a}+$$
$$+Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1\dots Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1\dots e^{t Cos.\, mu+t_1 Cos.\, mu_1+\dots}\ Cos.\left\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-\right.$$
$$\left.\left.-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)m-t\,Sin.\,mu-t_1\,Sin.\,mu_1-\dots\right\}\right]\dots (709),$$ [85]

---

[85] Ici il faut faire subir aux intégrales la même opération que dans la note précédente: mais il faudra nous contenter des résultats finaux. A cet effet annulons d'abord toutes les constantes t; puis tous les q et tous les s, sauf de passer tantôt un seul q, tantôt un seul s, de sorte qu'alors nous obtiendrons des intégrales à un seul facteur $Cos.^q px$ ou $Sin.^s rx$. Ensuite dans l'autre facteur trigonométrique *Sinus* ou *Cosinus*, où dans l'argument il entre le terme $(qp+u_a)x$ ou $(sr+u_a)x$, prenons tout de suite t pour le coefficient de x: dès-lors cette nouvelle constante t, que l'on ne doit pas confondre avec les t dans le texte (qui y entrent dans l'exponentielle), sera soumise à la condition d'être plus grande respectivement que qp, ou que sr, puisque u_a est positif de son origine. De cette manière nous parviendrons aux intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.\,tx\ \frac{dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\left\{2^{-q}(e^{mp}+e^{-mp})^q e^{-mt}+Cos.^q mp.\ Sin.\,mt\right\}\dots (710),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.\,tx\ \frac{x^2dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m}\left\{Cos.^q mp.\ Sin.\,mt-2^{-q}(e^{mp}+e^{-mp})^q e^{-mt}\right\}\dots (711),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Sin.\,tx\ \frac{xdx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4}\left\{2^{-q}(e^{mp}+e^{-mp})^q e^{-mt}-Cos.^q mp.\ Cos.\,mt\right\}\dots (712),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Sin.\,tx\ \frac{x^3dx}{m^4-x^4} = -\frac{\pi}{4}\left\{Cos.^q mp.\ Cos.\,mt+2^{-q}(e^{mp}+e^{-mp})^q e^{-mt}\right\}\ (713),$$ (où partout $t>qp$).

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi-tx)\ \frac{dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\left\{2^{-s}(e^{mr}-e^{-mr})^s e^{-mt}-Sin.^s mr.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi-smt)\right\}\ (714),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi-tx)\ \frac{x^2dx}{m^4-x^4} = -\frac{\pi}{4m}\left\{Sin.^s mr.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi-smt)+2^{-s}(e^{mr}-e^{-mr})^s e^{-mt}\right\}\ (715),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi-tx)\ \frac{xdx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\left\{-2^{-s}(e^{mr}-e^{-mr})^s e^{-mt}+Sin.^s mr.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi-mt)\right\}\ (716),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi-tx)\ \frac{x^3dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4}\left\{Sin.^s mr.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi-mt)+2^{-s}(e^{mr}-e^{-mr})^s e^{-mt}\right\}\ (717),$$

(où partout $(t>sr)$).

$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots}\ Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$

$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_a) x - t Sin.\, ux - t_1 Sin.\, u_1 x - \ldots \} \dfrac{dx}{(m^2 - x^2)^2} =$

$= - \dfrac{\pi}{4m^3} Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots e^{t Cos.\, mu + t_1 Cos.\, mu_1 + \ldots} [Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$

$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_a) m - t Sin.\, mu - t_1 Sin.\, mu_1 - \ldots \} +$

$+ m Cos.\, mu_a.\ (qp\ Cos. \{ (q+1) mp \}.\ Sec.\, mp + q_1 p_1\ Cos. \{ (q_1 + 1) mp_1 \}.\ Sec.\, mp_1 + \ldots +$

$+ sr\, Cos. \{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (s+1) mr \}.\ Cosec. mr + s_1 r_1\ Cos. \{ (s_1 - 1) \tfrac{1}{2} \pi - (s_1 + 1) mr_1 \}.\ Cosec. mr_1 + \ldots +$

$+ tu\ Cos. (t Sin.\, mu + mu) + t_1 u_1\ Cos. (t_1 Sin.\, mu_1 + mu_1) + \ldots) + mu_a \{ Cos. (t_a Sin.\, mu_a + mu_a) -$

$- t_a Sin. (t_a Sin.\, mu_a + mu_a).\ Sin.\, mu_a \}] \ldots (718),\ \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$

$e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots}\ Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_a) x -$

$- t Sin.\, ux - t_1 Sin.\, u_1 x - \ldots \} \dfrac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \dfrac{\pi}{4m} Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots Sin.^s mr.$

$Sin.^{s_1} mr_1 \ldots e^{t Cos.\, mu + t_1 Cos.\, mu_1 + \ldots} [Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_a) m -$

$- t Sin.\, mu - t_1 Sin.\, mu_1 - \ldots \} - m Cos.\, mu_a.\ (qp\ Cos. \{ (q+1) mp \}.\ Sec.\, mp +$

$+ q_1 p_1 Cos. \{ (q_1 + 1) mp_1 \}.\ Sec.\, mp_1 + \ldots + sr\ Cos. \{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (s+1) mr \}.\ Cosec.\, mr +$

$+ s_1 r_1\ Cos. \{ (s_1 - 1) \tfrac{1}{2} \pi - (s_1 + 1) mr_1 \}.\ Cosec.\, mr_1 + \ldots + tu\ Cos. (t Sin.\, mu + mu) +$

$+ t_1 u_1 Cos. (t_1 Sin. mu_1 + mu_1) + \ldots) - mu_a \{ Cos. (t_a Sin. mu_a + mu_a) - t_a Sin. (t_a Sin. mu_a + mu_a). Sin. mu_a \}]. (719),$

$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots}\ Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi -$

$- (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_a) x - t Sin.\, ux - t_1 Sin.\, u_1 x - \ldots \} \dfrac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} =$

$= - \dfrac{\pi}{2m} Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots e^{t Cos.\, mu + t_1 Cos.\, mu_1 + \ldots} [Cos.\, mu_a. (qp Sin. \{ (q+1) mp \}.$

$Sec.\, mp + q_1 p_1 Sin. \{ (q_1 + 1) mp_1 \}.\ Sec.\, mp_1 + \ldots + sr\, Sin. \{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (s+1) mr \}.\ Cosec.\, mr +$

$+ s_1 r_1\ Sin. \{ (s_1 - 1) \tfrac{1}{2} \pi - (s_1 + 1) mr_1 \}.\ Cosec.\, mr_1 + \ldots + tu\ Sin. (t Sin.\, mu + mu) +$

$+ t_1 u_1\ Sin. (t_1\ Sin.\ mu_1 + m u_1) + \ldots) + u_a \{ Sin. (t_a\ Sin.\ mu_a + mu_a) +$

$+ t_a Cos. (t_a Sin.\, mu_a + mu_a).\ Sin.\, mu_a \}] \ldots (720),\ \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$

$e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots}\ Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 \ldots + u_a) x -$

$- t Sin.\, ux - t_1 Sin.\, u_1 x - \ldots \} \dfrac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} = - \dfrac{\pi}{2} Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots$

$e^{t Cos.\, mu + t_1 Cos.\, mu_1 + \ldots}\ (Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \tfrac{1}{2} \pi - (qp + q_1 p_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_a) m -$

$- t Sin.\, mu - t_1 Sin.\, mu_1 - \ldots \} + m Cos.\, mu_a.\ [qp\ Sin. \{ (q+1) mp \}.\ Sec.\, mp +$

$$+ q_1 p_1 \ \mathrm{Sin.}\{(q_1+1)mp_1\}.\ \mathrm{Sec.}\ mp_1 + \ldots + sr\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mr\}.\ \mathrm{Cosec.}\ mr +$$

$$+ s_1 r_1\ \mathrm{Sin.}\{(s_1-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s_1+1)mr_1\}.\ \mathrm{Cosec.}\ mr_1 + \ldots + tu\,\mathrm{Sin.}(t\,\mathrm{Sin.}\ mu + mu) +$$

$$+ t_1 u_1\,\mathrm{Sin.}(t_1\,\mathrm{Sin.}\ mu_1 + mu_1) + \ldots] + mu_a\{\mathrm{Sin.}(t_a\,\mathrm{Sin.}\ mu_a + mu_a) + t_a\,\mathrm{Cos.}(t_a\,\mathrm{Sin.}\ mu_a +$$

$$+ mu_a).\ \mathrm{Sin.}\ mu_a\})\ \ldots (721),$$ [86] $$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1 x \ldots \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,ux + t_1\,\mathrm{Cos.}\,u_1 x + \ldots}$$

$$\mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_a)x - t\,\mathrm{Sin.}\,ux - t_1\,\mathrm{Sin.}\,u_1x - \ldots\}.\ Si(x)\frac{x\,dx}{m^2-x^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} mp_1 \ldots \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} mr_1 \ldots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,mu + t_1\,\mathrm{Cos.}\,mu_1 + \ldots}\ \mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$$

$$- (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_a)m - t\,\mathrm{Sin.}\ mu - t_1\,\mathrm{Sin.}\ mu_1 - \ldots\}.\ Si.(m)\ \ldots (730),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1 x \ldots \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\,\mathrm{Cos.}\,ux + t_1\,\mathrm{Cos.}\,u_1 x + \ldots}\ \mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$$

---

[86] Opérons tout comme dans la dernière note et nous aurons:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Cos.}\ tx\ \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^2}\mathrm{Cos.}^q mp.\ (\mathrm{Sin.}\ mt - m\,\mathrm{Cos.}\{(t-qp)m\}.$$

$$[t - pq + pq\ \mathrm{Cos.}\{(q+1)mp\}.\ \mathrm{Sec.}\ mp])\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (722),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Cos.}\ tx\ \frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{\pi}{4m}\mathrm{Cos.}^q mp.\ (\mathrm{Sin.}\ mt + m\,\mathrm{Cos.}\{(t-qp)m\}.$$

$$[t - pq + pq\ \mathrm{Cos.}\{(q+1)mp\}.\ \mathrm{Sec.}\ mp])\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (723),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Sin.}\ tx\ \frac{x\,dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{2m}\mathrm{Cos.}^q mp.\ [qp\ \mathrm{Cos.}\{(t-pq)m\}.\ \mathrm{Sin.}\{(q+1)mp\}.$$

$$\mathrm{Sec.}\ mp + (t-qp)\ \mathrm{Sin.}\{(t-pq)m\}]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (724),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q px.\ \mathrm{Sin.}\ tx\ \frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{2}\mathrm{Cos.}^q mp.\ (\mathrm{Cos.}\ mt + qmp\ \mathrm{Cos.}\{(t-pq)m\}.$$

$$\mathrm{Sin.}\{(q+1)mp\}.\ \mathrm{Sec.}\ mp + m\ (t-pq)\ \mathrm{Sin.}\{(t-pq)m\})\ \ldots\ldots (725),$$ (où partout $t > qp$).

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\ \frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{\pi}{4m^2}\mathrm{Sin.}^s mr.\ (\mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - mt) + m\,\mathrm{Cos.}\{(t-sr)m\}.$$

$$[t - sr + sr\ \mathrm{Cos.}\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mr\}.\ \mathrm{Cosec.}\ mr])\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (726),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\ \frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m}\mathrm{Sin.}^s mr.\ (\mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - mt) - m\,\mathrm{Cos.}\{(t-sr)m\}.$$

$$[t - sr + sr\ \mathrm{Cos.}\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mr\}.\ \mathrm{Cosec.}\ mr])\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (727),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\ \frac{x\,dx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{\pi}{2m}\mathrm{Sin.}^s mr.\ [sr\ \mathrm{Cos.}\{(t-sr)m\}.\ \mathrm{Sin.}\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi -$$

$$-(s+1)mr\}.\ \mathrm{Cosec.}\ mr + (t-sr)\ \mathrm{Sin.}\{(t-sr)m\}]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (728),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\ \frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\mathrm{Sin.}^s mr.\ [\mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - mt) + smr\ \mathrm{Cos.}\{(t-sr)m\}.$$

$$\mathrm{Sin.}\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mr\}.\ \mathrm{Cosec.}\ mr + m\,(t-sr)\ \mathrm{Sin.}\{(t-sr)m\}]\ \ldots (729),$$ (où partout $t > sr$).

$$- (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_a)x - t\,Sin.\,ux - t_1\,Sin.\,u_1x - \ldots \}.\ Si.(x)\ \frac{dx}{m^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2m}\ Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots\ Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots\ e^{t\,Cos.\,mu + t_1\,Cos.\,mu_1 + \ldots}\ Cos. \{ (s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$$

$$- (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_a)m - t\,Sin.\,mu - t_1\,Sin.\,mu_1 - \ldots \} \ \ldots\ (731)\ [87].$$

A l'égard de ces formules il faut remarquer qu'ici, quoique la constante u_a dérive son existence en général de la circonstance qu'elle se trouvait primitivement dans l'exponentielle', il n'est plus besoin qu'il en soit ainsi: excepté dans les intégrales (718) à (721), parce que celles-ci contiennent en outre la constante t_a, qui accompagne le u_a; lorsqu'on préfère annuler ce t_a, ces formules se simplifieront pour ce cas. En outre, quand on écrit dans les intégrales l'expression tout entière pour chaque cas qu'on rencontre, il se trouvera parmi les termes $t_n u_n Cos.(t_n\,Sin.\,mu_n + mu_n)$ toujours celui pour $n=a$, qui correspond à l'autre terme au coefficient $u_a t_a$, et ceux-ci pourront toujours se combiner dans un seul.

38. Les développements du N°. 13 pourront aussi trouver leur application auprès de nos théorèmes. A cet effet on a d'abord pour les formules (af) et (ag):

$$f(\alpha) = 1,\ f(\alpha+\beta\,e^{-mr}) = \frac{1-e^{-smr}}{1-e^{-mr}},\ f(\alpha+\beta\,e^{mri}) = \frac{1-e^{smri}}{1-e^{mri}} = \frac{1}{2}\{1 - Cos.\,smr +$$

$$+ Sin.\,smr.\ Cot.\tfrac{1}{2}mr\} + \frac{1}{2}\,i\{-Sin.\,smr + (1-Cos.\,smr)\ Cot.\tfrac{1}{2}mr\}$$ et de même $$f(\alpha+\beta\,e^{-mri}) =$$

$$= \frac{1}{2}\{1 - Cos.\,smr + Sin.\,smr.\ Cot.\tfrac{1}{2}mr\} - \frac{1}{2i}\{-Sin.\,smr + (1-Cos.\,smr)\ Cot.\tfrac{1}{2}mr\};$$ puis

$$\frac{d}{d\beta}.\,f(\alpha+\beta\,e^{mri}) = \frac{d}{d\beta}.\,\frac{1-\beta^s e^{smri}}{1-\beta e^{mri}} = \frac{[-1 + s\,Cos.\{(s-1)\,mr\} - (s-1)\ Cos.\,smr] +}{2(1-}$$

---

[87] Par le procédé des notes précédentes nous obtiendrons ici:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.\,tx.\ Si.(x)\ \frac{x\,dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ Cos.^q mp.\ Sin.\,mt.\ Si.(m)\ \ldots\ldots\ (732),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Sin.\,tx.\ Si.(x)\frac{dx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2m}\,Cos.^q mp.\ Cos.\,mt.\ Si.(m)\ \ldots\ (733),$$ (où partout $t > pq$),

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - tx).\ Si.(x)\,\frac{x\,dx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\,Sin.^s mr.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - mt).\ Si.(m)\ \ldots\ldots\ (734),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - tx).\ Si.(x)\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Sin.^s mr.\ Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - mt).\ Si.(m)\ \ldots\ldots\ (735),$$

(où partout $t > sr$).

Répétons encore que la constante t dans ces dernières notes n'a rien de commun avec les t qui figurent dans les exponentielles du texte.

$\frac{+\ i\,[s\,Sin.\{(s-1)\,mr\}\ -\ (s-1)\ Sin.\ smr]}{-\ Cos.\ mr)}$, où pour obtenir $\frac{d}{d\beta}\cdot f(\alpha+\beta e^{-mri})$ nous n'avons qu'à changer le signe de i. Après avoir mis $2r$ pour r, afin de ne pas avoir de fractions, nous trouverons:

$$\int_0^\infty [1-Cos.\,2srx+Sin.\,2srx.\,Cot.\,rx]\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\,\{-Sin.\,2smr+(1-Cos.\,2smr)\ Cot.\,mr\},$$

$$\int_0^\infty [-Sin.\,2srx+(1-Cos.\,2srx)\ Cot.\ rx]\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2}\,\{1+Cos.\,2smr-Sin.\,2smr.\,Cot.\,mr\}.$$

Mais par l'intermédiaire des formules $(\alpha\omega)$, $(\beta\alpha)$ et de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{m^2-x^2}=0$ (T. 19, N°. 4) $(\beta\sigma)$, ces résultats se prêtent à une réduction et donnent plus simplement:

$$\int_0^\infty Sin.\,2srx.\ Cot.\,rx\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\,(1-Cos.\,2smr)\ Cot.\ mr=\frac{\pi}{m}\ Sin.^2 smr.\ Cot.\,mr\ \ldots\ (736),$$

$$\int_0^\infty (1-Cos.\ 2srx)\ Cot.\ rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=2\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cot.\ rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2}\,(1-Sin.\ 2smr.$$

$Cot.\ mr)$ ... (737). Ensuite a-t-on $\int_0^\infty [1-Cos.\ 2srx+Sin.\ 2srx.\ Cot.\ rx]\,\frac{dx}{m^4-x^4}=$ $=\frac{\pi}{4m^3}\,\left\{2\,\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}-Sin.\ 2smr+(1-Cos.\ 2smr)\ Cot.\ mr\right\}$, $\int_0^\infty [1-Cos.\ 2srx+$ $+Sin.\,2srx.\ Cot.\,rx]\,\frac{x^2dx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4m}\left\{-2\,\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}-Sin.\,2mr+(1-Cos.\ 2smr)\ Cot.\ mr\right\}$,

$\int_0^\infty [-Sin.\ 2srx+(1-Cos.\ 2srx)\ Cot.\ rx]\,\frac{xdx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4m^2}\left\{2\,\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}-1+Cos.\,2smr-\right.$ $\left.-Sin.\ 2smr.\ Cot.\ mr\right\}$, $\int_0^\infty [-Sin.\ 2srx+(1-Cos.\ 2srx)\ Cot.\ rx]\,\frac{x^3dx}{m^4-x^4}=$ $=\frac{\pi}{4}\,\left\{2-2\,\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}-1+Cos.\,2smr-Sin.\,2smr.\ Cot.\,mr\right\}$. Lorsqu'on a égard aux formules $(\beta\beta)$, $(\beta\gamma)$, $(\beta\zeta)$, $(\beta\eta)$, $(\beta\delta)$, $(\beta\varepsilon)$, on peut simplifier ces intégrales de la manière suivante:

$$\int_0^\infty Sin.\,2srx.\ Cot.\,rx\,\frac{dx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4m^3}\left\{2\,\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}}-Sin.\ 2smr+(1-Cos.\ 2smr)\ Cot.\ mr-\right.$$
$$\left.-1+e^{-2smr}+Sin.\,2smr\right\}=\frac{\pi}{4m^3}\left\{(1-e^{-2smr})\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}+(1-Cos.\,2smr)\ Cot.\ mr\right\}.\ (738),$$

$$\int_0^\infty Sin.\,2srx.\ Cot.\,rx\,\frac{x^2dx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4m}\left\{(1-Cos.\,2smr)\ Cot.\,mr-(1-e^{-2smr})\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\right\}.\ (739),$$

$\int_0^\infty (1-Cos.\,2srx)\,Cot.\,rx\,\frac{xdx}{m^4-x^4} = 2\int_0^\infty Sin.^2 srx.\,Cot.\,rx\,\frac{xdx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\Big\{2\frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}} -$
$-1+Cos.\,2smr - Sin.\,2smr.\,Cot.\,mr + e^{-2smr} - Cos.\,2smr\Big\} = \frac{\pi}{4m^2}\Big\{(1-e^{-2smr})\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}} -$
$- Sin.\,2smr.\,Cot.\,mr\Big\}$ ... (740), $\int_0^\infty (1-Cos.\,2srx)\,Cot.\,rx\,\frac{x^3dx}{m^4-x^4} = 2\int_0^\infty Sin.^2 srx.$
$Cot.\,rx\,\frac{x^3dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4}\Big\{2 - Sin.\,2smr.\,Cot.\,mr - (1-e^{-2smr})\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\Big\}$ ...... (741).
Encore a-t-on $\int_0^\infty [1-Cos.\,2srx + Sin.\,2srx.\,Cot.\,rx]\,\frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3}\,\big|[-Sin.\,2smr +$
$+ (1-Cos.\,2smr)\,Cot.\,mr] - \frac{1}{2}mr[-1 + s\,Cos.\,|(s-1)2mr| - (s-1)\,Cos.\,2smr].\,Cosec.^2 mr\big|$,
$\int_0^\infty [1-Cos.\,2srx + Sin.\,2srx.\,Cot.\,rx]\,\frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m}\,\big|[Sin.\,2smr - (1-Cos.\,2smr)\,Cot.\,mr] -$
$- \frac{1}{2}mr[-1 + s\,Cos.\,|(s-1)\,2mr| - (s-1)\,Cos.\,2smr].\,Cosec.^2 mr\big|$, $\int_0^\infty [-Sin.\,2srx +$
$+ (1-Cos.\,2srx)\,Cot.\,rx]\,\frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi r}{m}\,[s\,Sin.\,|(s-1)\,2mr| - (s-1)\,Sin.\,2smr]\,Cosec.^2 mr$,
$\int_0^\infty [-Sin.\,2srx + (1-Cos.\,2srx)\,Cot.\,rx]\,\frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4}\,\big|[1-Cos.\,2smr + Sin.\,2smr.$
$Cot.\,mr] - 2 - \frac{1}{2}mr[\,|s\,Sin.\,|(s-1)\,2mr| - (s-1)\,Sin.\,2smr].\,Cosec.^2 mr\big|$. Mais nous pouvons employer ici à bon effet les intégrales $(\beta\iota)$, $(\beta\lambda)$, $(\beta\nu)$, $(\beta\xi)$, $(\beta\lambda)$, $(\beta\mu)$, et par leur substitution convenable les intégrales précédentes obtiendront les formes considérablement plus simples:



$\int_0^\infty Sin.\,2srx.\,Cot.\,rx\,\frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3}\,\big|(1-Cos.\,2smr)\,Cot.\,mr - \frac{1}{2}mr\,Cosec.^2 mr.\,[-1 +$
$+ s\,Cos.\,|(s-1)\,2mr| - (s-1)\,Cos.\,2smr] - 2smr\,Cos.\,2smr\big|$ .... (742),
$\int_0^\infty Sin.\,2srx.\,Cot.\,rx\,\frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{\pi}{4m}\,\big|(1-Cos.\,2smr)\,Cot.\,mr +$
$+ mr\,Cosec.^2 mr.\,[-1 + s\,Cos.\,|(s-1)\,2mr| - (s-1)\,Cos.\,2smr] +$
$+ 2smr\,Cos.\,2smr\big|$ .... (743), $\int_0^\infty (1-Cos.\,2srx)\,Cot.\,rx\,\frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} =$
$= 2\int_0^\infty Sin.^2 srx.\,Cot.\,rx\,\frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi r}{2m}\,\big|Cosec.^2 mr.\,[s\,Sin.\,|(s-1)\,2mr| -$
$- (s-1)\,Sin.\,2smr] + 2smr\,Sin.\,2smr\big|$ ... (744), $\int_0^\infty (1-Cos.\,2srx)\,Cot.\,rx\,\frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2} =$
$= 2\int_0^\infty Sin.^2 srx.\,Cot.\,rx\,\frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{-\pi}{4}\,\big|1 - Sin.\,2smr.\,Cot.\,mr +$

$+ \ \frac{1}{2} mr \ \ Cosec.^2 mr. \ [s \ Sin. \{(s-1) 2mr\} - (s-1) \ Sin. \ 2smr] \ +$
$+ \ 2smr \ \ Sin. \ 2smr\} \ \ldots \ (745).$

Enfin a-t-on $\int_0^\infty [1 - Cos. 2srx + Sin. 2srx. \ Cot. rx] \ Si.(x) \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} [- Ci.(m) +$
$+ Si.(m). \{- Sin. 2smr + (1 - Cos. 2smr) \ Cot. mr\}]$, $\int_0^\infty [- Sin. 2srx + (1 - Cos. 2srx) \ Cot. rx]$
$Si.(x) \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} Si.(m). \{2 - (1 - Cos. 2smr + Sin. 2smr. \ Cot. mr)\}$, d'où l'on déduit
à l'aide des intégrales (βo), (βn), (βq): $\int_0^\infty Sin. 2srx. \ Cot. rx. \ Si.(x) \frac{xdx}{m^2 - x^2} =$
$= \pi \ Sin.^2 smr. \ Cot. mr. \ Si.(m) \ldots (746)$, $\int_0^\infty (1 - Cos. 2srx) \ Cot. rx. \ Si.(x) \frac{dx}{m^2 - x^2} =$
$= 2 \int_0^\infty Sin.^2 srx. \ Cot. rx. \ Si.(x) \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} Si.(m). \ (1 - Sin. 2smr. \ Cot. mr) \ldots (747).$

Puis passons aux formules (ah) et (ai) du même Numéro, nous trouverons en premier lieu $f(\alpha) = 1$, $f(\alpha + \beta e^{-mr}) = \frac{1 + e^{-(2s+1)mr}}{1 + e^{-mr}}$, $f(\alpha + \beta e^{mri}) = \frac{1 + e^{-(2s+1)mri}}{1 + e^{-mri}} =$
$= \frac{1}{2} \{1 + Cos. 2smr - Sin. 2smr. \ Tang. \frac{1}{2} mr\} + \frac{1}{2i} \{Sin. 2smr - (1 - Cos. 2mr) \ Tang. \frac{1}{2} mr\}$,
d'où en changeant i en $-i$, la valeur de $f(\alpha + \beta e^{-mri})$; ensuite nous avons:
$\frac{d}{d\beta}. f(\alpha + \beta e^{mri}) = \frac{d}{d\beta}. \frac{1 + \beta^{2s+1} e^{(2s+1)mri}}{1 + \beta e^{mri}} = \frac{[-1 + 2s \ Cos. \{(2s+1) mr\} + (2s+1) \ Cos. \ 2smr] + i [2s \ Sin. \{(2s+1) mr\} + (2s+1) \ Sin. \ 2smr]}{2(1 + Cos. mr)}$, d'où
nous pouvons déduire $\frac{d}{d\beta}. f(\alpha + \beta e^{-mri})$ par le simple changement de i en $-i$.
Prenons maintenant un r double, et nous aurons:

$\int_0^\infty [1 + Cos. 4srx - Sin. 4srx. \ Tang. rx] \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \{Sin. 4smr - (1 - Cos. 4smr) \ Tang. mr\}$,
$\int_0^\infty [Sin. 4srx - (1 - Cos. 4srx) \ Tang. rx] \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} [2 - \{1 + Cos. 4smr - Sin. 4smr.$
$Tang. mr\}]$, d'où l'on déduit par l'intermédiaire des intégrales $(\alpha\omega)$, (βo), $(\beta \alpha)$, citées plus haut, $\int_0^\infty Sin. 4srx. \ Tang. rx \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} (1 - Cos. 4smr) \ Tang. mr =$
$= \frac{\pi}{m} \ Sin.^2 2smr. \ Tang. mr \ \ldots (748)$, $\int_0^\infty (1 - Cos. 4srx) \ Tang. rx \ \frac{xdx}{m^2 - x^2} =$

$= 2 \int_0^\infty Sin.^2 2srx.\ Tang.\ rx \frac{x dx}{m^2 - x^2} = - \frac{\pi}{2} (1 + Sin.\ 4smr.\ Tang.\ mr)$ ... (749) [88].

Puis on trouve $\int_0^\infty [1 + Cos.\ 4srx - Sin.\ 4srx.\ Tang.\ rx] \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3} [2 \frac{1 + e^{-(2s+1)2mr}}{1 + e^{-2mr}} + $ $+ Sin.\ 4smr - (1 - Cos.\ 4smr)\ Tang.\ mr]$, $\int_0^\infty [1 + Cos.\ 4srx - Sin.\ 4srx.\ Tang.\ rx] \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} =$ $= \frac{\pi}{4m} [-2 \frac{1 + e^{-(2s+1)2mr}}{1 + e^{-2mr}} + Sin.\ 4smr - (1 - Cos.\ 4smr)\ Tang.\ mr]$, $\int_0^\infty [Sin.\ 4srx -$ $- (1 - Cos.\ 4srx)\ Tang.\ rx] \frac{x dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^2} [2 \frac{1 + e^{-(2s+1)2mr}}{1 + e^{-2mr}} - 1 - Cos.\ 4smr +$ $+ Sin.\ 4smr.\ Tang.\ mr]$, $\int_0^\infty [Sin.\ 4srx - (1 - Cos.\ 4srx)\ Tang.\ rx] \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} =$ $= \frac{\pi}{4} [2 - 2 \frac{1 + e^{-(2s+1)2mr}}{1 + e^{-2mr}} - 1 - Cos.\ 4smr + Sin.\ 4smr.\ Tang.\ mr]$. Mais lorsqu'on emploie les intégrales ($\beta\beta$), ($\beta\gamma$), ($\beta\delta$), ($\beta\eta$), ($\beta\theta$), ($\beta\iota$) de plus haut, ces intégrales se prêtent encore à une réduction, et l'on trouve les intégrales plus simples: $\int_0^\infty Sin.\ 4srx.\ Tang.\ rx \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3} [-2 \frac{1 + e^{-(2s+1)2mr}}{1 + e^{-2mr}} - Sin.\ 4smr + (1 - Cos.\ 4smr)$ $Tang.\ mr + 1 + e^{-4smr} + Sin.\ 4smr] = \frac{\pi}{4m^3} [(1 - Cos.\ 4smr)\ Tang.\ mr -$ $- (1 - e^{-4smr}) \frac{1 - e^{-2mr}}{1 + e^{-2mr}}]$ .... (752), $\int_0^\infty Sin.\ 4srx.\ Tang.\ rx \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} =$ $= \frac{\pi}{4m} [(1 - Cos.\ 4smr)\ Tang.\ mr + (1 - e^{-4smr}) \frac{1 - e^{-2mr}}{1 + e^{-2mr}}]$ ... (753), $\int_0^\infty (1 - Cos.\ 4srx)$ $Tang.\ rx \frac{x dx}{m^4 - x^4} = 2 \int_0^\infty Sin.^2 2srx.\ Tang.\ rx \frac{x dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^2} [-2 \frac{1 + e^{-(2s+1)2mr}}{1 + e^{-2mr}} +$ $+ 1 + Cos.\ 4smr - Sin.\ 4smr.\ Tang.\ mr + e^{-4smr} - Cos.\ 4smr] = - \frac{\pi}{4m^2} [Sin.\ 4smr.$ $Tang.\ mr + (1 - e^{-4smr}) \frac{1 - e^{-2mr}}{1 + e^{-2mr}}]$ ... (754), $\int_0^\infty (1 - Cos.\ 4srx)\ Tang.\ rx \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} =$

---

[88] Doublons les constantes s dans les intégrales (736) et (737) et ajoutons ces valeurs aux intégrales du texte, alors après avoir écrit r au lieu de $2r$, nous aurons:

$\int_0^\infty Sin.\ 2srx.\ Cosec.\ rx \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{m} Sin.^2 smr.\ Cosec.\ mr$ .... (750),

$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.\ rx \frac{x dx}{m^2 - x^2} = - \frac{\pi}{4} Sin.\ 2smr.\ Cosec.\ mr$ ..... (751).

$= 2 \int_0^\infty \mathrm{Sin.}^2 2srx.\ \mathrm{Tang.}\ rx \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4} \left[(1 - e^{-4smr}) \frac{1 - e^{-2mr}}{1 + e^{-2mr}} - 2 - \mathrm{Sin.}\ 4smr.\right.$ $\left.\mathrm{Tang.}\ mr\right] \ldots (755)$ [89]. Encore a-t-on $\int_0^\infty [1 + \mathrm{Cos.} 4srx - \mathrm{Sin.} 4srx.\ \mathrm{Tang.} rx] \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} =$ $= \frac{\pi}{4m^3} [\mathrm{Sin.}\ 4smr - (1 - \mathrm{Cos.}\ 4smr)\ \mathrm{Tang.}\ mr - \frac{1}{2} mr\ \mathrm{Sec.}^2 mr. \{-1 + 2s \mathrm{Cos.} \{(2s+1) 2mr\} +$ $+ (2s+1)\ \mathrm{Cos.}\ 4smr\}]$, $\int_0^\infty [1 + \mathrm{Cos.}\ 4srx - \mathrm{Sin.}\ 4srx.\ \mathrm{Tang.}\ rx] \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} =$ $= -\frac{\pi}{4m} [\mathrm{Sin.}\ 4smr - (1 - \mathrm{Cos.}\ 4smr)\ \mathrm{Tang.}\ mr + \frac{1}{2} mr\ \mathrm{Sec.}^2 mr. \{-1 + 2s\ \mathrm{Cos.} \{(2s+1) 2mr\} +$ $+ (2s+1)\ \mathrm{Cos.}\ 4smr\}]$, $\int_0^\infty [\mathrm{Sin.}\ 4srx - (1 - \mathrm{Cos.}\ 4srx)\ \mathrm{Tang.}\ rx] \frac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} =$ $= \frac{\pi r}{2m} [2s\ \mathrm{Sin.} \{(2s+1) mr\} + (2s+1)\ \mathrm{Sin.}\ 4smr]\ \mathrm{Sec.}^2 mr$, $\int_0^\infty [\mathrm{Sin.}\ 4srx -$ $- (1 - \mathrm{Cos.}\ 4srx)\ \mathrm{Tang.}\ rx] \frac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4} \{2 (1 + \mathrm{Cos.}\ 4smr - \mathrm{Sin.}\ 4smr.\ \mathrm{Tang.}\ mr) -$ $- 2 - \frac{1}{2} mr \mathrm{Sec.}^2 mr. [2s \mathrm{Cos.} \{(2s+1) 2mr\} + (2s+1) \mathrm{Sin.} 4smr]\}$. Ces intégrales peuvent être simplifiées à l'aide des formules (β_ι), (β_κ), (β_ν), (β_ξ), (β_λ), (β_μ), qu'on a employées plus haut,

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}\ 4srx.\ \mathrm{Tang.}\ rx \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3} [(1 - \mathrm{Cos.}\ 4smr)\ \mathrm{Tang.}\ mr + \frac{1}{2} mr\ \mathrm{Sec.}^2 mr. \{-1 + 2s\ \mathrm{Cos.} \{(2s+1) 2mr\} + (2s+1)\ \mathrm{Cos.}\ 4smr\} - 4smr\ \mathrm{Cos.}\ 4smr] \ldots (760),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}\ 4srx.\ \mathrm{Tang.}\ rx \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{-\pi}{4m} [(1 - \mathrm{Cos.}\ 4smr)\ \mathrm{Tang.}\ mr + \frac{1}{2} mr\ \mathrm{Sec.}^2 mr. \{-1 + 2s\ \mathrm{Cos.} \{(2s+1) 2mr\} + (2s+1)\ \mathrm{Cos.}\ 4smr\} - 4smr\ \mathrm{Cos.}\ 4smr] \ldots (761),$$

$$\int_0^\infty (1 - \mathrm{Cos.}\ 4srx)\ \mathrm{Tang.}\ rx \frac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} = 2 \int_0^\infty \mathrm{Sin.}^2 2srx.\ \mathrm{Tang.}\ rx \frac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} =$$

---

[89] Afin de pouvoir prendre la somme de ces intégrales et des intégrales précédentes analogues (738) à (741), il faut préalablement doubler les s dans celles-ci: puis après-coup il faut prendre r au lieu de $2r$, et ainsi il viendra:

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.} 2srx.\ \mathrm{Cosec.} rx \frac{dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m^3} \left\{(1 - \mathrm{Cos.}\ 2smr)\ \mathrm{Cosec.}\ mr + 2 \frac{1 - e^{-2smr}}{e^{mr} - e^{-mr}}\right\} \ldots (756),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.} 2srx.\ \mathrm{Cosec.} rx \frac{x^2 dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{4m} \left\{(1 - \mathrm{Cos.}\ 2smr)\ \mathrm{Cosec.}\ mr - 2 \frac{1 - e^{-2smr}}{e^{mr} - e^{-mr}}\right\} \ldots (757),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^2 srx.\ \mathrm{Cosec.} rx \frac{x dx}{m^4 - x^4} = \frac{\pi}{8m^2} \left\{2 \frac{1 - e^{-2smr}}{e^{mr} - e^{-mr}} - \mathrm{Sin.}\ 2smr.\ \mathrm{Cosec.}\ mr\right\} \ldots (758),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^2 srx.\ \mathrm{Cosec.} rx \frac{x^3 dx}{m^4 - x^4} = -\frac{\pi}{8} \left\{\mathrm{Sin.}\ 2smr.\ \mathrm{Cosec.}\ mr + 2 \frac{1 - e^{-2smr}}{e^{mr} - e^{-mr}}\right\} \ldots (759).$$

$= \frac{\pi r}{2m} \{ 2s \, Sin. \, 4smr - Sec.^2 mr. \, [2s \, Sin. \{(2s+1) \, 2mr\} + (2s+1) \, Sin. \, 4smr] \} \; \ldots \; (762),$

$\int_0^\infty (1 - Cos. \, 4srx) \; Tang. \, rx \; \frac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} = 2 \int_0^\infty Sin.^2 \, 2srx. \; Tang. \, rx \; \frac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} =$

$\frac{\pi}{2} \{ 1 + Sin. \, 4smr. \; Tang. \, mr + \frac{1}{2} mr \; Sec.^2 mr. \; [2s \, Sin. \{(2s+1) \, 2mr\} + (2s+1) \; Sin. \, 4smr] -$

$- 4smr \; Sin. \, 4smr \} \; \ldots \; (763)$ [90].

Enfin on trouve $\int_0^\infty [1 + Cos. \, 4srx - Sin. \, 4srx. \; Tang. \, rx] \; Si.(x) \; \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} [- Ci.(m) +$ $+ Si.(m). \; \{ Sin. \, 4smr - (1 - Cos. \, 4smr) \; Tang. \, mr \}]$, $\int_0^\infty [Sin. \, 4srx -$ $- (1 - Cos. \, 4srx) \; Tang. \, rx] \; Si.(x) \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} Si.(m). \, [2 - (1 + Cos. \, 4smr - Sin. \, 4smr. \; Tang. \, mr)]$, intégrales, qui à l'aide des formules (β_0), (β_1), (β_2) se laissent transformer ainsi:

$\int_0^\infty Sin. \, 4srx. \; Tang. \, rx. \; Si.(x) \; \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \; Si.(m). \; Sin.^2 \, smr. \; Tang. \, mr \; \ldots\ldots\ldots \; (768),$

$\int_0^\infty (1 - Cos. \, 4srx) \; Tang. \, rx. \; Si.(x) \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = 2 \int_0^\infty Sin.^2 \, 2srx. \; Tang. \, rx. \; Si.(x) \; \frac{dx}{m^2 - x^2} =$

$= - \frac{\pi}{2m} \; Si.(m). \; (1 + Sin. \, 4smr. \; Tang. \, mr) \; \ldots \; (769)$ [91].

---

[90] Ces intégrales peuvent être ajoutées aux précédentes (742) à (745) lorsque dans celles-ci on prend un s double; ensuite on peut substituer r au lieu de $2r$, et on trouvera:

$\int_0^\infty Sin. \, 2srx. \; Cosec. \, rx \; \frac{dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^2} \; [(1 - Cos. \, 2smr) \; Cosec. \, mr - smr \; Sin. \, 2smr.$ $Cosec. \, mr + mr \; Cosec.^3 \, mr. \; Cos. \, mr. \; (1 - Cos. \, 2smr)] \; \ldots\ldots\ldots \; (764),$

$\int_0^\infty Sin. \, 2srx. \; Cosec. \, rx \; \frac{x^2 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{-\pi}{4m} \; [(1 - Cos. \, 2smr) \; Cosec. \, mr + smr \; Sin. \, 2smr.$ $Cosec. \, mr - mr \; Cosec.^3 \, mr. \; Cos. \, mr. \; (1 - Cos. \, 2smr)] \; \ldots\ldots\ldots \; (765),$

$\int_0^\infty Sin.^2 \, srx. \; Cosec. \, rx \; \frac{x dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi r}{4m} \; [Cosec.^3 \, mr. \; Cos. \, mr. \; Sin. \, 2smr - smr \; Cos. \, 2smr.$ $Cosec. \, mr] \; \ldots\ldots\ldots \; (766),$

$\int_0^\infty Sin.^2 \, srx. \; Cosec. \, rx \; \frac{x^3 dx}{(m^2 - x^2)^2} = \frac{\pi}{4} \; [Sin. \, 2smr. \; Cosec. \, 2mr + 2smr \; Cos. \, 2smr. \; Cosec. \, mr -$ $- mr \; Cosec.^3 \, mr. \; Cos. \, mr. \; Sin. \, 2smr] \; \ldots\ldots \; (767).$

[91] Agissant de la même manière que dans les notes précédentes, on déduit de ces intégrales en combinaison avec les précédentes (746), (747):

$\int_0^\infty Sin. \, 2srx. \; Cosec. \, rx. \; Si.(x) \; \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \pi \; Sin.^2 smr. \; Cosec. \, mr. \; Si.(m) \; \ldots\ldots\ldots \; (770),$

Puis on trouve pour les développements (ak) et (al): $f(\alpha) = 1$, $f(\alpha+\beta e^{-mr}) = \frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}}$, $f(\alpha+\beta e^{mri}) = \frac{1-q^s e^{smri}}{1-q e^{mri}} = \frac{[1-q \,Cos. mr - q^s Cos. smr + q^{s+1} Cos. \{(s-1)mr\}] + i[q \,Sin. mr - q^s Sin. smr + q^{s+1} Sin. \{(s-1)mr\}]}{1-2q \,Cos. mr + q^2}$, où il faut changer le signe de i pour obtenir $f(\alpha+\beta e^{-mri})$; encore $\frac{d}{d\beta}. f(\alpha+\beta e^{mri}) = \frac{(-2q+(1+q^2) Cos\, mr - s q^{s-1} Cos. smr + q^s [2s Cos. \{(s-1)mr\} + (s-1) Cos. \{(s+1)mr\}] - q^{s+1}[2(s-1) Cos\, smr + s Cos. \{(s-2)mr\}] + (s-1) q^{s+2} Cos. \{(s-1)mr\}) + i((1-q^2)\, Sin. mr - s q^{s-1} \,Sin. smr + q^s [2s Sin. \{(s-1)mr\} + (s-1)\, Sin. \{(s+1)mr\}] - q^{s+1} [2(s-1)\, Sin. smr + s Sin. \{(s-2)mr\}] + (s-1)\, q^{s+2} Sin. \{(s-1)\, mr\})}{(1-2q \,Cos. mr + q^2)^2}$, d'où découle de nouveau la valeur de $\frac{d}{d\beta}. f(\alpha+\beta e^{-mri})$ par le changement de i en $-i$. Par conséquent nous aurons:

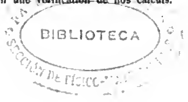
$$\int_0^\infty \frac{1-q \,Cos.\, rx - q^s \,Cos.\, srx + q^{s+1} \,Cos. \{(s-1)\, rx\}}{1-2q \,Cos.\, rx + q^2} \frac{x dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2q} \frac{Sin.\, mr - q^{s-1} Sin. smr + q^s Sin. \{(s-1)mr\}}{1-2q \,Cos. mr + q^2},$$
$$\int_0^\infty \frac{Sin. rx - q^{s-1} Sin. srx + q^s Sin. \{(s-1)rx\}}{1-2q \,Cos. rx + q^2} \frac{x dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2q} [1 - \frac{1-q \,Cos.\, mr - q^s \,Cos.\, smr + q^{s+1} \,Cos. \{(s-1)\, mr\}}{1-2q \,Cos. mr + q^2}];$$

mais dans l'Exposé de la théorie etc. (Verhand. der Kon. Akad. v. Wetensch., T. VIII), Partie Troisième, Méthode 23, N°. 16, j'ai démontré les formules suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1-2q Cos. rx + q^2} \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{m(1-q^2)} \frac{q \,Sin. mr}{1-2q Cos. mr + q^2} \ldots (\beta t), \int_0^\infty \frac{Cos. rx}{1-2q Cos. rx + q^2} \frac{dx}{m^2-x^2} =$$
$$= \frac{\pi}{2m} \frac{1+q^2}{1-q^2} \frac{Sin.\, mr}{1-2q \,Cos.\, mr + q^2} \ldots (\beta v), \int_0^\infty \frac{Sin.\, rx}{1-2q \,Cos.\, rx + q^2} \frac{x dx}{m^2-x^2} =$$

$$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\ Cosec.\, rx.\ Si.(x) \frac{dx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2m} Si.(m).\ Sin.\, 2smr.\ Cosec.\, mr \ldots\ldots (771).$$

Remarquons que nous aurions pu prendre dans les notes [88], [89], [90], [91] la différence des intégrales analogues, au lieu de leur somme; mais alors nous aurions obtenu des intégrales semblables, au facteur $Cot. 2rx$, qui dès-lors devront coïncider avec les premières intégrales de ce Numéro, et ne nous donneront rien de nouveau, sinon une vérification de nos calculs.



$= \frac{\pi}{2} \frac{q - Cos.\, mr}{1 - 2q\, Cos.\, mr + q^2} \ldots (\beta_f)$; et à l'aide de ces intégrales les nôtres peuvent être transformées dans les expressions plus simples suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\, srx - q\, Cos.\{(s-1)rx\}}{1 - 2q\, Cos.\, rx + q^2} \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \frac{Sin.\, smr - q\, Sin.\{(s-1)mr\}}{1 - 2q\, Cos.\, mr + q^2} \ldots (772),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, srx - q\, Sin.\{(s-1)rx\}}{1 - 2q\, Cos.\, rx + q^2} \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{Cos.\, smr - q\, Cos.\{(s-1)mr\}}{1 - 2q\, Cos.\, mr + q^2} \ldots (773)\ [92].$$

---

[92] Pour $s = 1$, ces deux formules donnent $\int_0^\infty \frac{Cos.\, rx - q}{1-2q Cos.rx+q^2} \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} \frac{Sin.\, mr}{1-2\,qCos.\, mr+q^2}$. (774), $\int_0^\infty \frac{Sin.\, rx}{1 - 2q\, Cos.\, rx + q^2} \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{q - Cos.\, mr}{1 - 2q\, Cos.\, mr + q^2}$, dont la première peut aussi se déduire des intégrales (β_t), (β_v), dans le texte, tandis que l'autre coïncide avec la dernière (β_f). Pour $s = 2$, on déduit de nouveau $\int_0^\infty \frac{Cos.\, 2rx}{1-2qCos.rx+q^2} \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m(1-q^2)} \frac{(1-q^2) Sin.2mr + 2q^3 Sin.mr}{1-2qCos.mr+q^2}$. (775), $\int_0^\infty \frac{Sin.\, 2rx}{1 - 2q\, Cos.\, rx + q^2} \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{q^2 - Cos.\, 2mr}{1 - 2q\, Cos.\, mr + q^2} \ldots (776)$. Puis pour en déduire les intégrales générales $I(s) = \int_0^\infty \frac{Cos.\, srx}{1-2qCos.rx+q^2} \frac{dx}{m^2-x^2}$ et $K(s) = \int_0^\infty \frac{Sin.\, srx}{1-2qCos.rx+q^2} \frac{xdx}{m^2-x^2}$, faisons $A = \frac{\pi}{2m} \frac{1}{1-2qCos.\, mr+q^2}$, $B = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-2qCos.mr+q^2}$, alors les intégrales (772), (773), considérées comme des équations de réduction, donnent successivement pour $s = 1, = 2$, etc.: $I(1) = A\, Sin.\, mr + q\, I(0)$; $I(2) = A(Sin.\, 2mr - q\, Sin.\, mr) + q\, I(1) = A\, Sin.\, 2mr + q^2 I(0); \ldots$ par conséquent $I(s) = A\, Sin.\, smr + q^s I(0)$; et encore $K(1) = - B(Cos.\, mr + q) + qK(0)$; $K(2) = = B(- Cos.\, 2mr + qCos.\, mr) + qK(1) = - B(Cos.\, 2mr + q^3) + q^2 K(0)$; — par suite $K(s) = = B(-Cos.\, smr + q^s) + q^s K(0)$, où pourtant $K(0)$ est zéro; donc: $\int_0^\infty \frac{Cos.\, srx}{1-2qCos.rx+q^2} \frac{dx}{m^2-x^2} = = \frac{\pi}{2m} \frac{Sin.\, smr}{1 - 2q\, Cos.mr + q^2} + \frac{\pi}{m(1-q^2)} \frac{q^{s+1}\, Sin.\, mr}{1 - 2qCos.\, mr + q^2} = \frac{\pi}{2m(1-q^2)} \frac{(1-q^2)\, Sin.\, smr + 2\, q^{s+1}\, Sin.\, mr}{1-2qCos.mr + q^2} \ldots (777)$, $\int_0^\infty \frac{Sin.\, srx}{1 - 2q\, Cos.\, rx + q^2} \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{q^s - Cos.\, smr}{1 - 2q\, Cos.\, mr + q^2} \ldots (778)$. Lorsqu'on y prend maintenant $s + t$ et $s - t$ successivement au lieu de s, et que l'on combine ces résultats par voie d'addition et de soustraction, on obtient: $\int_0^\infty \frac{Cos.\, srx.\ Cos.\, trx}{1 - 2q\, Cos.\, rx + q^2} \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m(1-q^2)} \frac{(1-q^2)\, Sin.\, smr.\ Cos.\, tmr + q^{s+1}(q^t + q^{-t})\, Sin.\, mr}{1 - 2q\, Cos.\, mr + q^2}$, $(s > t) \ldots\ldots\ldots (779)$, $\int_0^\infty \frac{Sin.\, srx.\ Sin.\, trx}{1 - 2q\, Cos.\, rx + q^2} \frac{dx}{m^2 - x^2} = = \frac{\pi}{2m(1-q^2)} \frac{(1-q^2)\, Cos.\, smr.\ Sin.\, tmr + q^{s+1}(q^t - q^{-t})\, Sin.\, mr}{1 - 2q\, Cos.\, mr + q^2}$, $(s > t) \ldots (780)$,

Ensuite nous aurons $\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.\,rx-q^s\,Cos.\,srx+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4m^3}\Big\{\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}}+$ $+q\,\frac{Sin.\,mr-q^{s-1}\,Sin.\,smr+q^s\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}\Big\}$, $\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.\,rx-q^s\,Cos.\,srx+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{x^2dx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4m}\Big\{q\,\frac{Sin.\,mr-q^{s-1}\,Sin.\,smr+q^s\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}-$ $-\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}}\Big\}$, $\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx-q^{s-1}\,Sin.\,srx+q^s\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{xdx}{m^4-x^4}=$ $=\frac{\pi}{4m^2q}\Big\{\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}}-\frac{1-q\,Cos.\,mr-q^s\,Cos.\,smr+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}\Big\}$, $\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx-q^{s-1}\,Sin.\,srx+q^s\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{x^3dx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4q}\Big\{2-\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}}-$ $-\frac{1-q\,Cos.\,mr-q^s\,Cos.\,smr-q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}\Big\}$; or, nous avons les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.\,rx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4m^3}\Big\{\frac{q\,Sin.\,mr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}+\frac{1}{1-qe^{-mr}}\Big\}\ \dots\ (\beta\chi),$$

$$\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.\,rx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{x^2dx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4m}\Big\{\frac{q\,Sin.\,mr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}-\frac{1}{1-qe^{-mr}}\Big\}\ \dots\ (\beta\psi),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{xdx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4m^2}\Big\{\frac{q-Cos.\,mr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}+\frac{e^{-mr}}{1-qe^{-mr}}\Big\}\ \dots\ (\beta\omega),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{x^3dx}{m^4-x^4}=\frac{\pi}{4}\Big\{\frac{q-Cos.\,mr}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}-\frac{e^{-mr}}{1-qe^{-mr}}\Big\}\ \dots\ (\gamma\alpha)\ [93];$$

et nous pouvons en faire usage pour simplifier les intégrales précédentes de la manière suivante:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx.\ Cos.\,trx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{4}\,\frac{q^s(q^t+q^{-t})-2\,Cos.\,smr.\ Cos.\,tmr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2},\ (s>t)\ \dots\ (781),=$$
$$=\frac{\pi}{4}\,\frac{2\,Sin.\,smr.\ Sin.\,tmr+q^t(q^s-q^{-s})}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2},\ (s<t)\ \dots\ (782).$$

[93] A cause des identités $\frac{1}{m^4-x^4}=\frac{1}{2m^2}\left(\frac{1}{m^2-x^2}+\frac{1}{m^2+x^2}\right)$, $\frac{x^2}{m^4-x^4}=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^2-x^2}-\frac{1}{m^2+x^2}\right)$, $\frac{x}{m^4-x^4}=\frac{1}{2m^2}\left(\frac{x}{m^2-x^2}+\frac{x}{m^2+x^2}\right)$, $\frac{x^3}{m^4-x^4}=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{m^2-x^2}-\frac{x}{m^2+x^2}\right)$. Les intégrales $(\beta\iota)$, $(\beta\upsilon)$, $(\beta\varphi)$, et les autres $(\alpha\nu)$, $(\alpha\xi)$, (αo), produisent les intégrales dans le texte.



$$\int_0^\infty \frac{Cos.srx - q\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,\frac{dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^3}\left\{\frac{e^{-smr}}{1-qe^{-mr}} + \frac{Sin.smr - q\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right\} \ldots (783),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.srx - q\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,\frac{x^2dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m}\left\{\frac{Sin.smr - q\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2} - \frac{e^{-smr}}{1-qe^{-mr}}\right\} \ldots (784),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.srx - q\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,\frac{xdx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\left\{\frac{e^{-smr}}{1-qe^{-mr}} - \frac{Cos.smr - q\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right\} \ldots (785),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.srx - q\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,\frac{x^3dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4}\left\{\frac{e^{-smr}}{1-qe^{-mr}} + \frac{Cos.smr - q\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right\} . (786), \text{[94]}$$

Encore a-t-on $\int_0^\infty \frac{1 - q\,Cos.\,rx - q^s\,Cos.\,srx + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{(m^2-x^2)^2} =$

$$= \frac{\pi}{4m^3}\left[q\,\frac{Sin.\,mr - q^{s-1}\,Sin.\,smr + q^s\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2} - mr\,\frac{-2q+(1+q^2)\,Cos.\,mr - s\,q^{s-1}\,Cos.\,smr + q^s[2s\,Cos.\{(s-1)mr\} + (s-1)Cos.\{(s+1)mr\}] - q^{s+1}[2(s-1)\,Cos.\,smr + s\,Cos.\{(s-2)mr\}] + (s-1)\,q^{s+2}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{(1 - 2q\,Cos.\,mr + q^2)^2}\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - q\,Cos.\,rx - q^s\,Cos.\,srx + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{\pi}{4m}\left[q\,\frac{Sin.mr - q^{s-1}\,Sin.smr + q^s\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2} + mr\,\frac{-2q+(1+q^2)Cos.mr - sq^{s-1}\,Cos.\,smr + q^s[2s\,Cos.\{(s-1)mr\} + (s-1)\,Cos.\{(s+1)mr\}] -}{(1 - 2q\,Cos.\,mr +}\right.$$

---

[94] Lorsque dans ces intégrales on prend successivement $s=1, =2$, etc., on arrive à des formules générales, qui suivraient aussi et d'une manière très-claire par l'emploi de nos intégrales, considérées comme des équations de réduction. De l'une et de l'autre manière on obtient:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^3(1-q^2)}\left\{\frac{(1-q^2)\,e^{-smr} - q^{s+1}\,(e^{mr}-e^{-mr})}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})} + \frac{(1-q^2)\,Sin.\,smr + 2\,q^{s+1}\,Sin.\,mr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}\right\} \ldots\ldots (787),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{x^2dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m(1-q^2)}\left\{\frac{(1-q^2)\,Sin.\,smr + 2\,q^{s+1}\,Sin.\,mr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2} + \frac{q^{s+1}\,(e^{mr}-e^{-mr}) - (1-q^2)\,e^{-smr}}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})}\right\} \ldots\ldots (788),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{xdx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4m^2}\left\{\frac{e^{-smr}-q^s}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})} + \frac{q^s - Cos.\,smr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}\right\} \ldots (789),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{x^3dx}{m^4-x^4} = \frac{\pi}{4}\left\{\frac{q^s - Cos.\,smr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2} + \frac{q^s - e^{-smr}}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})}\right\} \ldots (790).$$

$\frac{-\,q^{s+1}[2(s-1)\,Cos.\,smr + s\,Cos.\{(s-2)mr\}] + (s-1)\,q^{s+2}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{+\,q^2)^2}$, $\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx\,-}{1\,-}$

$\frac{-\,q^{s-1}\,Sin.\,srx + q^s\,Sin.\{(s-1)rx\}}{-\,2q\,Cos.\,rx + q^2}\,\frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi r}{2m}\,\frac{(1-q^2)\,Sin.\,mr - s\,q^{s-1}\,Sin.\,smr\,+}{(1-}$

$\frac{+\,q^s[2s\,Sin.\{(s-1)mr\} + (s-1)\,Sin.\{(s+1)mr\}] - q^{s+1}[2(s-1)\,Sin.\,smr + s\,Sin.\{(s-2)mr\}]\,+}{-\,2q\,Cos.\,mr\,+}$

$\frac{+\,(s-1)\,q^{s+2}\,Sin.\{(s-1)mr\}}{+\,q^2)^2}$, $\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx - q^{s-1}\,Sin.\,srx + q^s\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} =$

$= \frac{\pi}{4q}\,[2\,\frac{1 - q\,Cos.\,mr - q^s\,Cos.\,smr + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2} - 2 - mrq\,\frac{(1-q^2)\,Sin.\,mr\,-}{(1-}$

$\frac{-\,sq^{s-1}\,Sin.\,smr + q^s[2s\,Sin.\{(s-1)mr\} + (s-1)\,Sin.\{(s+1)mr\}] - q^{s+1}[2(s-1)\,Sin.\,smr\,+}{-\,2q\,Cos.\,mr\,+}$

$\frac{+\,s\,Sin.\{(s-2)mr\}] + (s-1)\,q^{s+2}\,Sin.\{(s-1)mr\}}{+\,q^2)^2}$; mais comme nous trouvons

$$\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.rx}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,\frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{q\pi}{4m^3}\,\frac{Sin.mr}{1-2q\,Cos.mr+q^2} - \frac{\pi qr}{4m^2}\,\frac{(1+q^2)\,Cos.mr - 2q}{(1-2q\,Cos.mr+q^2)^2} \;\ldots\; (;\beta),$$

$$\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.rx}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,\frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{q\pi}{4m}\,\frac{Sin.mr}{1-2q\,Cos.mr+q^2} - \tfrac{1}{4}\pi qr\,\frac{(1+q^2)\,Cos.mr - 2q}{(1-2q\,Cos.mr+q^2)^2} \;\ldots\; (;\gamma),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{xdx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{1-q^2}{4m}\,\frac{\pi r\,Sin.\,mr}{(1-2q\,Cos.\,mr+q^2)^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (;\delta),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.rx}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,\frac{x^3dx}{(m^2-x^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{q-Cos.mr}{1-2q\,Cos.mr+q^2} - \frac{1-q^2}{4}\,\frac{\pi mr\,Sin.mr}{(1-2q\,Cos.mr+q^2)^2} \ldots (;\varepsilon)\;[95],$$

nous pouvons en déduire les résultats plus simples:

$\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx - q\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4m^3}\,[\frac{Sin.\,smr - q\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2}\,-$

$-\,\frac{mr}{q}\,\frac{s\,Cos.\,smr - q[2s\,Cos.\{(s-1)mr\} + (s-1)\,Cos.\{(s+1)mr\}] + q^2[2(s-1)\,Cos.\,smr\,+}{(1-2q\,Cos.\,mr\,+}$

$\frac{+\,s\,Cos.\{(s-2)mr\}] - (s-1)\,q^3\,Cos.\{(s-1)mr\}}{+\,q^2)^2}$]. (791), $\int_0^\infty \frac{Cos.\,srx - q\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,\frac{x^2dx}{(m^2-x^2)^2} =$

---

[95] Outre l'intégrale $\int_0^\infty \frac{Sin.\,rx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{q-Cos.\,mr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2} \;\ldots\; (\beta\varphi)$, nous déduirons de (774) et $(\beta\iota)$ $\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.\,rx}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\,\frac{q\,Sin.\,mr}{1-2q\,Cos.\,mr+q^2} \;\ldots\; (\gamma\zeta)$. Différentions ces intégrales et nous obtiendrons les formules $(;\delta)$, $(,\beta)$; soustrayons ces résultats des intégrales $(\beta\varphi)$ et $(\beta\zeta)$, alors il vient les autres $(,\varepsilon)$, $(;\gamma)$.

$$= -\frac{\pi}{4m}\Big[\frac{\mathrm{Sin.}smr - q\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)mr\}}{1-2q\,\mathrm{Cos.}mr+q^2} + \frac{mr}{q}\,\frac{s\,\mathrm{Cos.}smr - q[2s\,\mathrm{Cos.}\{(s-1)mr\}+(s-1)\mathrm{Cos.}\{(s+1)mr\}] + q^2[2(s-1)\mathrm{Cos.}smr + s\,\mathrm{Cos.}\{(s-2)mr\}] - (s-1)q^3\,\mathrm{Cos.}\{(s-1)mr\}}{(1-2q\,\mathrm{Cos.}mr+q^2)^2}\Big] \ldots (792),$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}srx - q\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)rx\}}{1-2q\,\mathrm{Cos.}rx+q^2}\,\frac{x\,dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi r}{2mq}\,\frac{s\,\mathrm{Sin.}smr - q[2s\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)mr\}+(s-1)\mathrm{Sin.}\{(s+1)mr\}] + q^2[2(s-1)\mathrm{Sin.}smr + s\,\mathrm{Sin.}\{(s-2)mr\}] - (s-1)q^3\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)mr\}}{(1-2q\,\mathrm{Cos.}mr+q^2)^2} \ldots (793),$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}srx - q\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)rx\}}{1-2q\,\mathrm{Cos.}rx+q^2}\,\frac{x^2\,dx}{(m^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4q}\Big[2q\,\frac{\mathrm{Cos.}smr - q\,\mathrm{Cos.}\{(s-1)mr\}}{1-2q\,\mathrm{Cos.}mr+q^2} - mr\,\frac{s\,\mathrm{Sin.}smr - q[2s\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)mr\}+(s-1)\mathrm{Sin.}\{(s+1)mr\}] + q^2[2(s-1)\mathrm{Sin.}smr + s\,\mathrm{Sin.}\{(s-2)mr\}] - (s-1)q^3\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)mr\}}{(1-2q\,\mathrm{Cos.}mr+q^2)^2} \ldots (794).$$

Enfin on trouve

$$\int_0^\infty \frac{1 - q\,\mathrm{Cos.}rx - q^s\,\mathrm{Cos.}srx + q^{s+1}\,\mathrm{Cos.}\{(s-1)rx\}}{1-2q\,\mathrm{Cos.}rx+q^2}\,Si.(x)\,\frac{x\,dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\Big\{-Ci.(m) + q\,Si.(m)\,\frac{\mathrm{Sin.}mr - q^{s-1}\,\mathrm{Sin.}smr + q^s\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)mr\}}{1-2q\,\mathrm{Cos.}mr+q^2}\Big\} \ldots (795),$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}rx - q^{s-1}\,\mathrm{Sin.}srx + q^s\,\mathrm{Sin.}\{(s-1)rx\}}{1-2q\,\mathrm{Cos.}rx+q^2}\,Si.(x)\,\frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\,Si.(m)\,\frac{q - \mathrm{Cos.}mr + q^{s-1}\,\mathrm{Cos.}smr - q^s\,\mathrm{Cos.}\{(s-1)mr\}}{1-2q\,\mathrm{Cos.}mr+q^2} \ldots (796).$$

---

§ IV. DE QUELQUES AUTRES INTÉGRALES QUI SE DÉDUISENT DES INTÉGRALES PRÉCÉDENTES.

39. Lorsque nous passons en revue les résultats obtenus jusqu'ici, tant les théorèmes que nous avons démontrés que les intégrales que nous avons évaluées, nous nous apercevons bientôt, qu'il s'y trouve des formules propres à nous conduire à de nouveaux faits généraux, qui s'exprimeront sous forme de théorèmes. Occupons-nous en premier lieu de quelques théorèmes qui se laissent combiner entre-eux.

Les différences du théorème (I) d'avec les théorèmes (XVII), (XXXIII), (LV), (LXI) nous fournissent successivement :

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\,\frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\left\{f(\alpha+\beta) - f(\alpha+\beta e^{-mr})\right\}, \quad \ldots \quad \text{(LXXXVIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi) - F_a(-xi)}{2i}\,\frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\left\{f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots) - \right.$$

$$\left. - f(\alpha+\beta\, e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1},\ldots)\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(LXXXIX)}$$ [96]

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\,\frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{8m^4}\left[f(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\left\{f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr} + f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr})\right\}\right], \ldots \text{(XC)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{8m^4}\left[f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots) - \frac{1}{2}\left\{f(\alpha+\beta\, e^{-(1-i)mr},\right.\right.$$

$$\left.\left.\alpha_1+\beta_1\, e^{-(1-i)mr_1},\ldots) + f(\alpha+\beta\, e^{-(1+i)mr},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-(1+i)mr_1},\ldots)\right\}\right], \quad \ldots \quad \text{(XCI)}$$ [97]

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\,\frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\left[f(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\left\{f(\alpha+\beta e^{mri}) + f(\alpha+\beta e^{-mri})\right\}\right], \ldots \text{(XCII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\left[f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots) - \frac{1}{2}\left\{f(\alpha+\beta\, e^{mri},\right.\right.$$

$$\left.\left.\alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1i},\ldots) + f(\alpha+\beta\, e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mr_1i},\ldots)\right\}\right]. \quad \ldots\ldots \quad \text{(XCIII)}$$ [98]

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\,\frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\left[2f(\alpha+\beta) - f(\alpha+\beta e^{-mr}) - \frac{1}{2}\left\{f(\alpha+\beta e^{-mri}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + f(\alpha+\beta\, e^{-mri})\right\}\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XCIV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\left[2f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots) - f(\alpha+\beta e^{-mr},\ \alpha_1+\beta_1 e^{-mr_1},\ldots) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left\{f(\alpha+\beta\, e^{mri},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{mr_1i},\ldots) + f(\alpha+\beta\, e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1 e^{-mr_1i},\ldots)\right\}\right]. \ . \ \text{(XCV)}$$ [99].

---

[96] On pourrait aussi les déduire d'une manière indépendante par l'intégrale T. 212, N°. 12 $\int_0^\infty Sin.\,ax\ \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\ (1-e^{-am})\ \ldots\ (\gamma\eta)$.

[97] Ces théorèmes suivent encore de l'intégrale $\int_0^\infty Sin.ax\ \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{8m^4}\ (1-e^{-am}\,Cos.am) .(\gamma\theta)$ que j'ai déduite dans l'Exposé de la théorie etc., cité déjà plus haut, Méthode 25, N°. 6.

[98] Comme on pourrait déduire aussi de l'intégrale T. 212, N°. 17 $\int_0^\infty Sin.\,ax\ \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\ (1 - Cos.\,am)\ \ldots\ (\gamma\iota)$.

[99] Prenons la somme des intégrales $(\gamma\eta)$, $(\gamma\iota)$ et nous aurons $\int_0^\infty Sin.\,ax\ \frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\ (2 - e^{-am} - Cos.\,am)\ \ldots\ (\gamma\varkappa)$, intégrale qui mènerait indépendamment aux théorèmes du texte.

40. En second lieu quelques-unes des intégrales obtenues pourront donner lieu à de nouveaux théorèmes. Choisissons les plus simples et d'abord l'intégrale (147) du N°. 14, $\int_0^\infty \frac{Sin.\, arx}{1-2u\, Cos.\, rx+u^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2(1-u)^2}\,(1-u^a)$, $(u<1)$; par conséquent après avoir multiplié les développements (B) et (F) par $\frac{1}{1-2u\, Cos.\, rx+u^2}\,\frac{1}{x}$, nous aurons:

$$\int_0^\infty \frac{F(xi)-F(-xi)}{2i}\,\frac{1}{1-2u\, Cos.\, rx+u^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2(1-u)^2}\left[\frac{1-u}{1}\,\beta\,\frac{df(\alpha)}{d\alpha}+\frac{1-u^2}{1.2}\,\beta^2\,\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}+\ldots\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2(1-u)^2}\,[f(\alpha+\beta)-f(\alpha+\beta u)], \quad \ldots\ldots \quad \text{(XCVI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{F_a(xi)-F_a(-xi)}{2i}\,\frac{1}{1-2u\, Cos.\, rx+u^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2(1-u)^2}\,[f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots)-$$

$$-f(\alpha+\beta u,\ \alpha_1+\beta_1 u,\ldots)]. \quad \ldots\ldots \quad \text{(XCVII)}$$

Puis passons au Paragraphe II, où nous rencontrons les intégrales (467), (483), (485), (518), susceptibles d'être immédiatement appliquées aux équations (B) et (F): mais les intégrales correspondantes (468), (484), (486), au contraire, ne peuvent être employées auprès des développements (A) et (E) comme tels: ceux-ci doivent subir une transformation, c'est-à-dire il faut les soustraire de leur valeur pour un r zéro. Alors chaque coefficient différentiel aura pour facteur la fonction $(1-Cos.\, arx)$, ainsi que l'exigent nos intégrales: les premiers membres de ces équations deviendront de cette manière $F(0)-\frac{1}{2}\{F(xi)+F(-xi)\}$, $F_a(0)-\frac{1}{2}\{F_a(xi)+F_a(-xi)\}$, parce que de l'argument $\alpha+\beta e^{rx}$ on tire $\alpha+\beta$, tant par la supposition primitive $r=o$, que pour la valeur zéro de x. Observons que toute cette remarque ne vaut pas quant à l'intégrale analogue (516), qui permettra une application immédiate.

Or, puisque les intégrales mentionnées peuvent s'écrire ainsi:

$$\int_0^\infty (1-Cos.\, arx)\ Tang.\, rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}+\frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,e^{-amr} \ \ldots \ (797),$$

$$\int_0^\infty Sin.\, arx.\ Tang.\, rx\ \frac{dx}{m^2+x^2} = -\frac{\pi}{2m}\,\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,(1-e^{-amr}) \ \ldots\ldots \ (798),$$

$$\int_0^\infty (1-Cos.\, arx)\ Cot.\, rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}-\frac{\pi}{2}\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\,e^{-amr} \ \ldots\ldots \ (799),$$

$$\int_0^\infty Sin.\, arx.\ Cot.\, rx\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\,(1-e^{-amr}) \ \ldots\ldots \ (800),$$

$$\int_0^\infty (1-Cos.\, arx)\ Cosec.\, rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{mr}-e^{-mr}}\,(1-e^{-amr}) \ \ldots\ldots \ (801),$$

$$\int_0^\infty Sin.\, arx.\ Cosec.\, rx\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m}\,\frac{1}{e^{mr}-e^{-mr}}\,(1-e^{-amr}) \ \ldots\ldots \ (802),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,arx}{1-2u\,Cos.\,rx+u^2}\,\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\,\frac{1}{(1-ue^{-mr})\,(1-ue^{mr})}\left\{e^{-amr}-u\,\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{1-u^2}\,u^a\right\}\ldots(803),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,arx}{1-2u\,Cos.\,rx+u^2}\,\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-amr}-u^a}{(1-ue^{-mr})\,(1-ue^{mr})}\;\ldots\ldots\;(804),$$

on trouvera tout de suite les théorèmes suivants:

$$\int_0^\infty [F(0)-\frac{1}{2}\{F(xi)+F(-xi)\}]\;Tang.\,rx\;\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,f(\alpha+\beta)+$$
$$+\frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,f(\alpha+\beta e^{-mr}),\;\ldots\ldots\;(XCVIII)$$

$$\int_0^\infty [F_a(0)-\frac{1}{2}\{F_a(xi)+F_a(-xi)\}]\;Tang.\,rx\;\frac{xdx}{m^2+x^2}=\pi\,\frac{e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,f(\alpha+\beta,\;\alpha_1+\beta_1,\ldots)+$$
$$+\frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,f(\alpha+\beta e^{-mr},\;\alpha_1+\beta_1 e^{-mr},\ldots),\;\ldots\ldots\;(XCIX)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F(xi)-F(-xi)\}\;Tang.\,rx\;\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\,\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,\{f(\alpha+\beta e^{-mr}-f(\alpha+\beta)\},\;.\;(C)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F_a(xi)-F_a(-xi)\}\;Tang.\,rx\;\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\,\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,\{f(\alpha+\beta e^{-mr},\,\alpha_1+\beta_1 e^{-mr},\ldots)-$$
$$-f(\alpha+\beta,\;\alpha_1+\beta_1,\ldots)\},\;\ldots\ldots\;(CI)$$

$$\int_0^\infty [F(0)-\frac{1}{2}\{F(xi)+F(-xi)\}]\;Cot.\,rx\;\frac{xdx}{m^2+x^2}=\pi\,\frac{e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\,f(\alpha+\beta)-$$
$$-\frac{\pi}{2}\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\,f(\alpha+\beta e^{-mr}),\;\ldots\ldots\;(CII)$$

$$\int_0^\infty [F_a(0)-\frac{1}{2}\{F_a(xi)+F_a(-xi)\}]\;Cot.\,rx\;\frac{xdx}{m^2+x^2}=\pi\,\frac{e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\,f(\alpha+\beta,\;\alpha_1+\beta_1,\ldots)-$$
$$-\frac{\pi}{2}\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\,f(\alpha+\beta e^{-mr},\;\alpha_1+\beta_1 e^{-mr},\ldots),\;\ldots\ldots\;(CIII)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F(xi)-F(-xi)\}\;Cot.\,rx\;\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\,\{f(\alpha+\beta)-f(\alpha+\beta e^{-mr}\},\;.\;(CIV)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F_a(xi)-F_a(-xi)\}\;Cot.\,rx\;\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\,\{f(\alpha+\beta,\;\alpha_1+\beta_1,\ldots)-$$
$$-f(\alpha+\beta e^{-mr},\;\alpha_1+\beta_1 e^{-mr},\ldots)\},\;\ldots\ldots\;(CV)$$

$$\int_0^\infty [F(0)-\frac{1}{2}\{F(xi)+F(-xi)\}]\;Cosec.\,rx\;\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{mr}-e^{-mr}}\,\{f(\alpha+\beta)-f(\alpha+\beta e^{-mr})\},\;.\;(CVI)$$

$$\int_0^\infty [F_a(0)-\frac{1}{2}\{F_a(xi)+F_a(-xi)\}]\;Cosec.\,rx\;\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{mr}-e^{-mr}}\,\{f(\alpha+\beta,\;\alpha_1+\beta_1,\ldots)-$$
$$-f(\alpha+\beta e^{-mr},\;\alpha_1+\beta_1 e^{-mr},\ldots)\},\;\ldots\ldots\;(CVII)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F(xi)-F(-xi)\}\;Cosec.\,rx\;\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{m}\,\frac{1}{e^{mr}-e^{-mr}}\,\{f(\alpha+\beta)-f(\alpha+\beta e^{-mr})\},\;.\;(CVIII)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i} \{ F_a(xi) - F_a(-xi) \} \; Cosec. \, rx \, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m} \frac{1}{e^{mr}-e^{-mr}} \{ f(\alpha+\beta, \; \alpha_1+\beta_1, \ldots) -$$

$$- f(\alpha+\beta e^{-mr}, \; \alpha_1+\beta_1 \, e^{-mr}, \ldots) \}, \quad \ldots \ldots \quad \text{(CIX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} \{ F(xi)+F(-xi) \} \frac{1}{1-2u \, Cos. \, rx+u^2} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} \frac{1}{(1-u e^{-mr})(1-u e^{mr})} \{ f(\alpha+\beta e^{-mr}) -$$

$$- \frac{e^{mr}-e^{-mr}}{1-u^2} u f(\alpha+\beta u) \}, \quad \ldots \ldots \quad \text{(CX)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} \{ F_a(xi)+F_a(-xi) \} \frac{1}{1-2u \, Cos. \, rx+u^2} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} \frac{1}{(1-u e^{-mr})(1-u e^{mr})} \{ f(\alpha+\beta e^{-mr},$$

$$\alpha_1+\beta_1 \, e^{-mr}, \ldots) - \frac{e^{mr}-e^{-mr}}{1-u^2} u f(\alpha+\beta u, \; \alpha_1+\beta_1 u, \ldots) \}, \quad \ldots \ldots \quad \text{(CXI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i} \{ F(xi)-F(-xi) \} \frac{1}{1-2u \, Cos. \, rx+u^2} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1-u e^{-mr})(1-u e^{mr})} \{ f(\alpha+\beta e^{-mr}) -$$

$$- f(\alpha+\beta u) \}, \quad \ldots \ldots \quad \text{(CXII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i} \{ F_a(xi)-F_a(-xi) \} \frac{1}{1-2u \, Cos. \, rx+u^2} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1-u e^{-mr})(1-u e^{mr})} \{ f(\alpha+\beta e^{-mr},$$

$$\alpha_1+\beta_1 \, e^{-mr}, \ldots) - f(\alpha+\beta u, \; \alpha_1+\beta_1 u, \ldots) \}. \quad \ldots \ldots \quad \text{(CXIII)}$$

Viennent ensuite quelques intégrales au dénominateur q^2-x^2 du paragraphe III. Les intégrales (736), (748), (750) et (778) se prêtent tout de suite à l'application auprès des développements (B) et (F): il n'en est pas ainsi quant aux intégrales (737), (749), (751), qui exigent de nouveau une transformation comme plus haut par l'introduction de F(0), lorsqu'on veut employer les développements (A) et (E); quant à l'intégrale (777), on peut y appliquer ces derniers développements tout de suite sans aucune préparation. Maintenant écrivons les intégrales mentionnées sous la forme suivante:

$$\int_0^\infty (1 - Cos. \, arx) \; Tang. \, rx \; \frac{xdx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2} (1 + Tang. \, mr. \; Sin. \, amr) \; \ldots\ldots \; (805),$$

$$\int_0^\infty Sin. \, arx. \; Tang. \, rx \; \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} \; Tang. \, mr. \; (1 - Cos. \, amr) \; \ldots\ldots \; (806),$$

$$\int_0^\infty (1 - Cos. \, arx) \; Cot. \, rx \; \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2} (1 - Cot. \, mr. \; Sin. \, amr) \; \ldots\ldots \; (807),$$

$$\int_0^\infty Sin. \, arx. \; Cot. \, rx \; \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} \; Cot. \, mr. \; (1 - Cos. \, amr) \; \ldots\ldots \; (808),$$

$$\int_0^\infty (1 - Cos. \, arx) \; Cosec. \, rx \; \frac{xdx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2} \; Cosec. \, mr. \; Sin. \, amr \; \ldots\ldots \; (809).$$

$$\int_0^\infty Sin. \, arx. \; Cosec. \, rx \; \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} \; Cosec. \, mr. \; (1 - Cos. \, amr) \; \ldots\ldots \; (810),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\,arx}{1-2u\,Cos.\,rx+u^2}\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m(1-u^2)}\,\frac{(1-u^2)\,Sin.\,amr+2u^{a+1}\,Sin.\,mr}{1-2u\,Cos.\,mr+u^2}\ \ldots\ (811),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,arx}{1-2u\,Cos.\,rx+u^2}\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{u^a-Cos.\,amr}{1-2u\,Cos.\,mr+u^2}\ \ldots\ldots\ (812),$$

et nous en tirerons les théorèmes suivants:

$$\int_0^\infty \left[F(0)-\frac{1}{2}\{F(xi)+F(-xi)\}\right] Tang.\,rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}\left[f(\alpha+\beta)+\right.$$
$$\left.+\,Tang.\,mr.\,\frac{1}{2i}\{f(\alpha+\beta e^{mri})-f(\alpha+\beta e^{-mri})\}\right],\ \ldots\ldots\ (CXIV)$$

$$\int_0^\infty \left[F_a(0)-\frac{1}{2}\{F_a(xi)+F_a(-xi)\}\right] Tang.\,rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}\left[f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots)+\right.$$
$$\left.+\,Tang.\,mr.\,\frac{1}{2i}\{f(\alpha+\beta e^{mri},\ \alpha_1+\beta_1 e^{mri},\ldots)-f(\alpha+\beta e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1 e^{-mri},\ldots)\}\right],\ (CXV)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F(xi)-F(-xi)\}\ Tang.\,rx\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\,Tang.\,mr.\left[f(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\{f(\alpha+\beta e^{mri})+\right.$$
$$\left.+\,f(\alpha+\beta e^{-mri})\}\right],\ \ldots\ldots\ (CXVI)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F_a(xi)-F_a(-xi)\}\ Tang.\,rx\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\,Tang.\,mr.\left[f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots)-\right.$$
$$\left.-\,\frac{1}{2}\{f(\alpha+\beta e^{mri},\ \alpha_1+\beta_1 e^{mri},\ldots)+f(\alpha+\beta e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1 e^{-mri},\ldots)\}\right],\ \ldots\ (CXVII)$$

$$\int_0^\infty \left[F(0)-\frac{1}{2}\{F(xi)+F(-xi)\}\right] Cot.\,rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2}\left[f(\alpha+\beta)-Cot.\,mr.\,\frac{1}{2i}\{f(\alpha+\beta e^{mri})-\right.$$
$$\left.-\,f(\alpha+\beta e^{-mri})\}\right],\ \ldots\ldots\ (CXVIII)$$

$$\int_0^\infty \left[F_a(0)-\frac{1}{2}\{F_a(xi)+F_a(-xi)\}\right] Cot.\,rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2}\left[f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots)-\right.$$
$$\left.-\,Cot.\,mr.\,\frac{1}{2i}\{f(\alpha+\beta e^{mri},\ \alpha_1+\beta_1 e^{mri},\ldots)-f(\alpha+\beta e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1 e^{-mri},\ldots)\}\right],\ \ldots\ (CXIX)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F(xi)-F(-xi)\}\ Cot.\,rx\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\,Cot.\,mr.\left[f(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\{f(\alpha+\beta e^{mri})+\right.$$
$$\left.+\,f(\alpha+\beta e^{-mri})\}\right],\ \ldots\ldots\ (CXX)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F_a(xi)-F_a(-xi)\}\ Cot.\,rx\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\,Cot.\,mr.\left[f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots)-\right.$$
$$\left.-\,\frac{1}{2}\{f(\alpha+\beta e^{mri},\ \alpha_1+\beta_1 e^{mri},\ldots)+f(\alpha+\beta e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1 e^{-mri},\ldots)\}\right],\ \ldots\ (CXXI)$$

$$\int_0^\infty \left[F(0)-\frac{1}{2}\{F(xi)+F(-xi)\}\right] Cosec.\,rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}\,Cosec.\,mr.\,\frac{1}{2i}\{f(\alpha+\beta e^{mri})-$$
$$-\,f(\alpha+\beta e^{-mri})\},\ \ldots\ldots\ (CXXII)$$

$$\int_0^\infty [F_a(0) - \frac{1}{2}\{F_a(xi) + F_a(-xi)\}]\ Cosec.\,rx\ \frac{xdx}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2}\ Cosec.\,mr.\ \frac{1}{2i}\{f(\alpha+\beta\, e^{mri},$$
$$\alpha_1+\beta_1\, e^{mri},\ldots) - f(\alpha+\beta\, e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mri},\ldots)\}, \quad \text{(CXXIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F(xi) - F(-xi)\}\ Cosec.\,rx\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Cosec.\,mr.\ [f(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\{f(\alpha+\beta\, e^{mri}) +$$
$$+ f(\alpha+\beta\, e^{-mri})\}], \quad \text{(CXXIV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F_a(xi) - F_a(-xi)\}\ Cosec.\,rx\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Cosec.\,mr.\ [f(\alpha+\beta,\ \alpha_1+\beta_1,\ldots) -$$
$$- \frac{1}{2}\{f(\alpha+\beta\, e^{mri},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{mri},\ldots) + f(\alpha+\beta\, e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mri},\ldots)\}], \quad \text{(CXXV)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\{F(xi)+F(-xi)\}\ \frac{1}{1-2u\,Cos.\,rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m(1-2u\,Cos.\,mr+u^2)}\ [\frac{2u}{1-u^2}\ Sin.\,mr.\,f(\alpha+\beta u)+$$
$$+ \frac{1}{2i}\{f(\alpha+\beta\, e^{mri}) - f(\alpha+\beta\, e^{-mri})\}], \quad \text{(CXXVI)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\{F_a(xi)+F_a(-xi)\}\ \frac{1}{1-2u\,Cos.\,rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m(1-2u\,Cos.\,mr+u^2)}\ [\frac{2u}{1-u^2}\ Sin.\,mr.\,f(\alpha+\beta u,$$
$$\alpha_1+\beta_1 u,\ldots) + \frac{1}{2i}\{f(\alpha+\beta\, e^{mri},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{mri},\ldots) - f(\alpha+\beta\, e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mri},\ldots)\}], \quad \text{(CXXVII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F(xi) - F(-xi)\}\ \frac{1}{1-2u\,Cos.\,rx+u^2}\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2(1-2u\,Cos.\,mr+u^2)}\ [f(\alpha+\beta u) -$$
$$- \frac{1}{2}\{f(\alpha+\beta\, e^{mri}) + f(\alpha+\beta\, e^{-mri})\}], \quad \text{(CXXVIII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{2i}\{F_a(xi) - F_a(-xi)\}\ \frac{1}{1-2u\,Cos.\,rx+u^2}\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2(1-2u\,Cos.\,mr+u^2)}\ [f(\alpha+\beta u,$$
$$\alpha_1+\beta_1 u,\ldots) - \frac{1}{2}\{f(\alpha+\beta\, e^{mri},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{mri},\ldots) + f(\alpha+\beta\, e^{-mri},\ \alpha_1+\beta_1\, e^{-mri},\ldots)\}]. \quad \text{(CXXIX)}$$

Quant aux fonctions $F_a(xi)$ dans les théorèmes (XCVI) à (CXXIX), il faut observer que la nature des intégrales employées exige, comme on a pu le remarquer déjà, que les constantes r restent partout égales à l'r dans l'intégrale: car, par l'origine de ces intégrales il est évident qu'ici on ne pourrait pas changer arx dans bx par exemple, puisque ar désigne ici nécessairement un multiple de r. Or, tel étant le cas, les développements (E) et (F) ne seraient plus en état de nous aider si tous les r n'y étaient pas égaux. Cette circonstance, il est vrai, réduit quelque peu le sphère des applications et ne donnera donc pas aux résultats autant de généralité, que l'on y rencontrerait lorsqu'on pourrait écrire une seule constante au lieu du produit ar.

41. Passons maintenant aux applications et d'abord à celle des développements (a), (b), (e) et (f) du N°. 4 aux théorèmes (LXXXVIII) à (XCV). Alors on a $f(\alpha+\beta)=2^s$, $f(\alpha+\beta e^{-mr})=(1+e^{-mr})^s$, $f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr})=$ $=(1+2e^{-mr}\,Cos.\,mr+e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}\left[Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.\,mr}{e^{mr}+Cos.\,mr}\right)\right\}+i\,Sin.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.\,mr}{e^{mr}+Cos.\,mr}\right)\right\}\right]$, d'où l'on tire la valeur de $f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr})$ en changeant le signe de i; et $f(\alpha+\beta e^{mri})=$ $=2^s\,Cos.^s\,\tfrac{1}{2}mr.\,(Cos.\,\tfrac{1}{2}smr+i\,Sin.\,\tfrac{1}{2}smr)$, d'où découle $f(\alpha+\beta e^{-mri})$ par le simple changement de i en $-i$. Par conséquent, pour des r doubles:

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\, Sin.\, srx \frac{dx}{x(m^2+x^2)}=\frac{\pi}{2m^2}\left\{1-2^{-s}(1+e^{-2mr})^s\right\}$ ...... (813), $\int_0^\infty Cos.^s rx.$ $Cos.^{s_1} r_1x \ldots\, Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{dx}{x(m^2+x^2)}=\frac{\pi}{2m^2}\left\{1-2^{-s-s_1-\ldots}(1+e^{-2mr})^s\right.$ $\left.(1+e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots\right\}$ .... (814), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\, Sin.\, srx\frac{dx}{x(4m^4+x^4)}=\frac{\pi}{8m^4}\left[1-2^{-s}\right.$ $\left.(1+2e^{-2mr}\,Cos.\,2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\,Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.\,2mr}{e^{2mr}+Cos.\,2mr}\right)\right\}\right]$ .... (815),

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1x \ldots\, Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{dx}{x(4m^4+x^4)}=\frac{\pi}{8m^4}\left[1-2^{-s-s_1-\ldots}\right.$ $(1+2e^{-2mr}\,Cos.\,2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}(1+2e^{-2mr_1}\,Cos.\,2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\ldots$ $\left.Cos.\left\{s\,Arctg.\left(\frac{Sin.\,2mr}{e^{2mr}+Cos.\,2mr}\right)+s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.\,2mr_1}{e^{2mr_1}+Cos.\,2mr_1}\right)+\ldots\right\}\right]$ .... (816),

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\, Sin.\, srx\frac{dx}{x(m^2-x^2)}=\frac{\pi}{2m^2}\left\{1-Cos.^s mr.\, Cos.\, smr\right\}$ .... (817),

$\int_0^\infty Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1x\ldots\, Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{dx}{x(m^2-x^2)}=\frac{\pi}{2m^2}\left[1-Cos.^s mr.\, Cos.^{s_1} mr_1\ldots\right.$ $\left.Cos.\left\{(sr+s_1r_1+\ldots)m\right\}\right]$ ... (818), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\, Sin.\, srx\frac{dx}{x(m^4-x^4)}=\frac{\pi}{4m^4}\left\{2-2^{-s}\right.$ $\left.(1+e^{-2mr})^s-Cos.^s mr.\, Cos.\, smr\right\}$ ... (819), $\int_0^\infty Cos.^s rx.\, Cos.^{s_1} r_1x\ldots\, Sin.\left\{(sr+s_1r_1+\ldots)x\right\}\frac{dx}{x(m^4-x^4)}=$ $=\frac{\pi}{4m^4}\left[2-2^{-s-s_1-\ldots}(1+e^{-2mr})^s\,1+e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots-Cos.^s mr.\, Cos.^{s_1} mr_1\ldots\right.$ $\left.Cos.\left\{(sr+s_1r_1+\ldots)m\right\}\right]$ ... (820).

Pour les théorèmes suivants bornons-nous aux développements (a) et (b), les autres (e) et (f) ne donnant pas ici des formules plus générales, comme il a été observé dans le dernier Numéro. Or, puisque $F(0)=f(\alpha+\beta)=2^s$, $f(\alpha+\beta u)=(1+u)^s$, il viendra, après que nous aurons doublé les r, et après quelques réductions faciles:

$\int_0^\infty \frac{Cos.^s rx.\, Sin.\, srx}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2(1-u)^2}\left\{1-2^{-s}(1+u)^s\right\}$ .... (821),

19

$$\int_0^\infty (1-Cos.^s rx.\ Cos. srx)\ Tang.2rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi e^{-4mr}}{1+e^{-4mr}}+\frac{\pi}{2^{s+1}}\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-4mr}}(1+e^{-2mr})^{s+1}\ \dots\ (822),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin.\ srx.\ Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\frac{1-e^{-4mr}}{1+e^{-4mr}}\left\{2^{-s}(1+e^{-2mr})^s-1\right\}\ \dots\ (823),$$

$$\int_0^\infty (1-Cos.^s rx.\ Cos. srx)\ Cot.2rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}}-\frac{\pi}{2^{s+1}}\frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-2mr}}(1+e^{-2mr})^{s-1}\ \dots\ (824),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin.\ srx.\ Cot.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}}\left\{1-2^{-s}(1+e^{-2mr})^s\right\}\ \dots\ (825),$$

$$\int_0^\infty (1-Cos.^s rx.\ Cos. srx)\ Cosec.2rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{2mr}-e^{-2mr}}\left\{1-2^{-s}(1+e^{-2mr})^s\right\}\ \dots\ (826),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\ Sin.\ srx.\ Cosec.\ rx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{2\pi}{m(e^{2mr}-e^{-2mr})}\left\{1-2^{-s}(1+e^{-2mr})^s\right\}\ \dots\ (827),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^s rx.\ Cos. srx}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{s+1}m(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})}\left\{(1+e^{-2mr})^s-\right.$$

$$\left.-\frac{u}{1-u}(e^{2mr}-e^{-2mr})(1+u)^{s-1}\right\}\ \dots\dots\ (828),\quad \int_0^\infty \frac{Cos.^s rx.\ Sin.\ srx}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{s+1}(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})}\left\{(1+e^{-2mr})^s-(1+u)^s\right\}\ \dots\dots\dots\dots\dots\ (829),$$

$$\int_0^\infty (1-Cos.^s rx.\ Cos. srx)\ Tang.2rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}(1+Tang.2mr.\ Cos.^s mr.\ Sin. smr)\ \dots\ (830),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin.\ srx.\ Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\ Tang.\ 2mr.\ (1-Cos.^s mr.\ Cos.\ smr)\ \dots\ (831),$$

$$\int_0^\infty (1-Cos.^s rx.\ Cos.\ srx)\ Cot.\ 2rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2}(1-Cot.\ 2mr.\ Cos.^s mr.\ Sin.\ smr)\ \dots\ (832),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin.\ srx.\ Cot.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\ Cot.\ 2mr.\ (1-Cos.^s mr.\ Cos.\ smr)\ \dots\ (833),$$

$$\int_0^\infty (1-Cos.^s rx.\ Cos.\ srx)\ Cosec.\ 2rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{4}\ Cosec.\ mr.\ Cos.^{s-1} mr.\ Sin.\ smr\ \dots\ (834),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\ Sin.\ srx.\ Cosec.\ rx\ \frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{m}\ Cosec.\ 2mr.\ (1-Cos.^s mr.\ Cos.\ smr)\ \dots\ (835),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^s rx.\ Cos.\ srx}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2^{s+1}m(1-2u\,Cos.\,2mr+u^2)}\left\{\frac{2u}{1-u}\ Sin.\ 2mr.\ (1+u)^{s-1}+\right.$$

$$\left.+\ 2^s\ Cos.^s mr.\ Sin.\ smr\right\}\ \dots\dots\dots\dots\dots\ (836),\quad \int_0^\infty \frac{Cos.^s rx.\ Sin.\ srx}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{xdx}{m^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{s+1}(1-2u\,Cos.\,2mr+u^2)}\left\{(1+u)^s-2^s\ Cos.^s mr.\ Cos.\ smr\right\}\ \dots\ (837).$$

Pour les développements (g), (h), (l) et (m) on a $f(\alpha+\beta)=0$, $f(\alpha+\beta e^{-mr})=$ $=(1-e^{-mr})^s$, $f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr})=(1-2e^{-mr}\ Cos.\ mr+e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}$

$\left[Cos.\left\{s\, Arctg.\left(\frac{Sin.\, mr}{e^{mr} - Cos.\, mr}\right)\right\} - i\, Sin.\left\{s\, Arctg.\left(\frac{Sin.\, mr}{e^{mr} - Cos.\, mr}\right)\right\}\right]$, $f(\alpha+\beta\, e^{mri}) =$ $= 2^s\, Sin.^s \tfrac{1}{2} mr.\ \left\{Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - \tfrac{1}{2} smr) - i\, Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - \tfrac{1}{2} smr)\right\}$; où pour avoir $f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr})$, et $f(\alpha+\beta\, e^{-mri})$ on n'a qu'à changer le signe de i dans les deux dernières équations. Donc par les théorèmes (LXXXVIII) à (XCV), lorsque nous prenons des r doubles:

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx) \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2^{s+1} m^2} (1-e^{-2mr})^s$ ... (838), $\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots$ $Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1 r_1+\ldots)x\right\} \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2^{1+s+s_1+\ldots} m^2} (1-e^{-2mr})^s$ $(1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots$ .... (839), $\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx) \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} =$ $= \frac{\pi}{2^{s+3} m^4} (1-2\, e^{-2mr}\, Cos.\, 2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}\, Cos.\left\{s\, Arctg.\left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr}\right)\right\}$ ... (840),

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1 r_1+\ldots)x\right\} \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} =$ $= \frac{\pi}{2^{3+s+s_1+\ldots} m^4} (1-2\, e^{-2mr}\, Cos.\, 2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s} (1-2\, e^{-2mr_1}\, Cos.\, 2mr_1 + e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1} \ldots$ $Cos.\left\{s\, Arctg.\left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr}\right) + s_1\, Arctg.\left(\frac{Sin.\, 2mr_1}{e^{2mr_1} - Cos.\, 2mr_1}\right) + \ldots\right\}$ .... (841),

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx) \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\, Sin.^s mr.\ Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - smr)$ .... (842),

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1 r_1+\ldots)x\right\} \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\, Sin.^s mr.$ $Sin.^{s_1} mr_1 \ldots\ Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1 r_1+\ldots)m\right\}$ .... (843), $\int_0^\infty Sin.^s rx.$ $Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx) \frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4} \left\{2^{-s}(1-e^{-2mr})^s + Sin.^s mr.\ Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - smr)\right\}$ ... (844),

$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1 r_1+\ldots)x\right\} \frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4} [2^{-s-s_1-\ldots}$ $(1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots + Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots\ Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -\right.$ $\left.- (sr+s_1 r_1+\ldots)m\right\}]$ ... (845).

Les développements (l) et (m) tombent de nouveau hors d'usage auprès des théorèmes suivants, comme auparavant, et l'on y a encore $F(0) = f(\alpha+\beta) = 0$, $f(\alpha+\beta) = (1-u)^s$, par conséquent:

$\int_0^\infty \frac{Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx)}{1-2u\, Cos.\, 2rx + u^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}} (1-u)^{s-2}$ .... (846)

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Tang.}\, 2rx\, \frac{xdx}{m^2+x^2} = -\frac{\pi}{2^{s+1}}\, \frac{1+e^{-2mr}}{1+e^{-4mr}}\, (1-e^{-2mr})^{s+1} \ \dots\ (847),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Tang.}\, 2rx\, \frac{dx}{m^2+x^2} = -\frac{\pi}{2^{s+1} m}\, \frac{1+e^{-2mr}}{1+e^{-4mr}}\, (1-e^{-2mr})^{s+1} \ \dots\ (848),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Cot.}\, 2rx\, \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}}\, \frac{1+e^{-4mr}}{1+e^{-2mr}}\, (1-e^{-2mr})^{s-1} \ \dots\ (849),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Cot.}\, 2rx\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1} m}\, \frac{1+e^{-4mr}}{1+e^{-2mr}}\, (1-e^{-2mr})^{s-1} \ \dots\ (850),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^{s-1} rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Sec.}\, rx\, \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{1}{2^{s-1}}\, \frac{\pi}{e^{2mr}-e^{-2mr}}\, (1-e^{-2mr})^{s} \ \dots\ (851),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^{s-1} rx.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Sec.}\, rx\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s-1} m}\, \frac{1}{e^{2mr}-e^{-2mr}}\, (1-e^{-2mr})^{s} \ \dots\ (852),$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}^s rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)}{1-2u\,\text{Cos.}\, 2rx+u^2}\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1} m\, (1-ue^{-2mr})\, (1-ue^{2mr})} \Big\{(1-e^{-2mr})^s -$$

$$- \frac{e^{2mr}-e^{-2mr}}{1+u}\, u(1-u)^{s-1}\Big\} \ \dots\dots\ (853), \quad \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)}{1-2u\,\text{Cos.}\, 2rx+u^2}\, \frac{xdx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+1}\, (1-ue^{-2mr})\, (1-ue^{2mr})} \Big\{(1-u)^s - (1-e^{-2mr})^s\Big\} \ \dots\dots\dots\dots\ (854),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Tang.}\, 2rx\, \frac{xdx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\ \text{Tang.}\, 2mr.\ \text{Sin.}^s mr.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) \ \dots\ (855),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Tang.}\, 2rx\, \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ \text{Tang.}\, 2mr.\ \text{Sin.}^s mr.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) \ \dots\ (856),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Cot.}\, 2rx\, \frac{xdx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\ \text{Cot.}\, 2mr.\ \text{Sin.}^s mr.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) \ \dots\ (857),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Cot.}\, 2rx\, \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ \text{Cot.}\, 2mr.\ \text{Sin.}^s mr.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) \ \dots\ (858),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^{s-1} rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Sec.}\, rx\, \frac{xdx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\ \text{Sec.}\, mr.\ \text{Sin.}^{s-1} mr.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) \ \dots\ (859),$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}^{s-1} rx.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx).\ \text{Sec.}\, rx\, \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ \text{Sec.}\, mr.\ \text{Sin.}^{s-1} mr.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) \ \dots\ (860),$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}^s rx.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)}{1-2u\,\text{Cos.}\, 2rx+u^2}\, \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1} m\, (1-2u\,\text{Cos.}\, 2mr+u^2)} \Big\{\frac{2u}{1+u}\, (1-u)^{s-1}\, \text{Sin.}\, 2mr -$$

$$- 2^s\, \text{Sin.}^s mr.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smr)\Big\} \ \dots\dots\dots\ (861), \quad \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}^s rx.\ \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)}{1-2u\,\text{Cos.}\, 2rx+u^2}\, \frac{xdx}{m^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+1}\, (1-2u\,\text{Cos.}\, 2mr+u^2)} \Big\{2^s\, \text{Sin.}^s mr.\ \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smr) - (1-u)^s\Big\} \ \dots\ (862).$$

Quant aux développements (n) et (o) du même N°. 4, leur application aux huit premiers théorèmes, eu égard aux équations spéciales énoncées plus haut, donnera ici:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\right\} \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1}m^2}(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots \ldots\ldots\ldots (863),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\right\} \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+3}m^4}(1+2e^{-2mp}Cos.2mp+e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q} (1+2e^{-2mp_1}Cos.2mp_1+e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1}\ldots (1-2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s} (1-2e^{-2mr_1}Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\ldots Cos.\left\{q\,Arctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right) + q_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.\ 2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.\ 2mp_1}\right)+\ldots - s\,Arctg.\left(\frac{Sin.\ 2mr}{e^{2mr}-Cos.\ 2mr}\right) - s_1\,Arctg.\left(\frac{Sin.\ 2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.\ 2mr_1}\right)-\ldots\right\} \ldots\ldots\ldots (864),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\right\} \frac{dx}{x(m^2-x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2m^2} Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots\ Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots\ Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m\right\} \ldots\ldots\ldots (865),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ Sin.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\right\} \frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\left[2^{-q-q_1-\ldots-s-s_1-\ldots}(1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1}\ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1}\ldots + Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots\ Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots\ Cos.\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m\right\}\right] \ldots (866).$$

Pour l'application de ces développements aux théorèmes suivants il est absolument nécessaire de prendre les r partout égaux à l'r, qui entre déjà dans les théorèmes, et dès-lors il serait superflu de prendre plus d'un facteur $Cos.^q px$ ou $Sin.^s rx$; maintenant nous aurons:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Sin.\left\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)rx\right\}}{1-2u\,Cos.2rx+u^2}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{q+s+1}}(1+u)^q (1-u)^{s-2} \ldots (867),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.\ Tang.2rx\frac{xdx}{m^2+x^2} = -\frac{\pi}{2^{q+s+1}}\frac{1}{1+e^{-4mr}}(1+e^{-2mr})^{q+1}(1-e^{-2mr})^{s+1} \ldots (868),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.\ Tang.2rx\frac{dx}{m^2+x^2} = -\frac{\pi}{2^{q+s+1}m}\frac{1}{1+e^{-4mr}}(1+e^{-2mr})^{q+1}(1-e^{-2mr})^{s+1} \ldots (869),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.Cot.2rx\frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+s+1}}(1+e^{-4mr})(1+e^{-2mr})^{q-1}(1-e^{-2mr})^{s-1} \ldots (870),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.\ \mathrm{Cot.}\,2rx\,\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+s+1}m}(1+e^{-4mr})(1+e^{-2mr})^{q-1}(1-e^{-2mr})^{s-1}\ \ldots\ldots\ (871),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+s-1}}e^{-2mr}(1+e^{-2mr})^{q-1}(1-e^{-2mr})^{s-1}\ \ldots\ldots\ (872),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+s-1}m}e^{-2mr}(1+e^{-2mr})^{q-1}(1-e^{-2mr})^{s-1}\ \ldots\ (873),$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}}{1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2rx+u^2}\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+s+1}m\,(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})}\left\{(1+e^{-2mr})^q(1-e^{-2mr})^s-(e^{2mr}-e^{-2mr})\,u(1+u)^{q-1}(1-u)^{s-1}\right\}\ \ldots\ldots\ (874),$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}}{1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2rx+u^2}\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+s+1}(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})}\left\{(1+u)^{q-1}(1-u)^{s-1}-(1+e^{-2mr})^q(1-e^{-2mr})^s\right\}\ \ldots\ (875),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.\ \mathrm{Tang.}\,2rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}\mathrm{Tang.}\,2mr.\ \mathrm{Cos.}^q mr.\ \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr\right\}\ \ldots\ (876),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.\ \mathrm{Tang.}\,2rx\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\mathrm{Tang.}\,2mr.\ \mathrm{Cos.}^q mr.\ \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr\right\}\ \ldots\ (877),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.\ \mathrm{Cot.}\,2rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}\mathrm{Cot.}\,2mr.\ \mathrm{Cos.}^q mr.\ \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr\right\}\ \ldots\ldots\ (878),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.\mathrm{Cot.}\,2rx\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\mathrm{Cot.}\,2mr.\ \mathrm{Cos.}^q mr.\ \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr\right\}\ldots\ (879),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}\frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}\mathrm{Cos.}^{q-1} mr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} mr.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr\right\}\ \ldots\ (880),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\mathrm{Cos.}^{q-1} mr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} mr.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (881),$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}}{1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2rx+u^2}\frac{dx}{m^4-x^2}=\frac{\pi}{2m(1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2mr+u^2)}\left[\frac{u}{2^{q+s-1}}u(1+u)^{q-1}(1-u)^{s-1}\,\mathrm{Sin.}\,2mr-\mathrm{Cos.}^q mr.\ \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr\right\}\right]\ \ldots\ldots\ldots\ (882),$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}}{1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2rx+u^2}\frac{xdx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2(1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2mr+u^2)}\left[\mathrm{Cos.}^q mr.\ \mathrm{Sin.}^s mr.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr\right\}-2^{-q-s}(1+u)^q(1-u)^s\right]\ \ldots\ (883).$$

Observons encore à l'égard de ces vingt dernières intégrales, qu'elles exigent la présence de la constante s, c'est-à-dire qu'il n'est pas permis de l'y annuler, comme on pourrait le faire avec l'autre constante q. En voici la raison: comme cet s, appartenant au facteur $Sin.^s rx$, a fait évanouir la fonction $f(\alpha+\beta)$, qui se trouve dans les théorèmes, le terme correspondant à cette $f(\alpha+\beta)$ resterait perdu aussi dans le cas de s zéro, tandis qu'au contraire il s'introduit alors toujours dans la valeur des intégrales.

42. Suivant le précepte du N°. 6 il est permis de différentier maintenant par rapport à s quelques-unes des intégrales, obtenues au N°. précédent, où il faut annuler cette constante après la différentiation; ainsi on trouvera:

$$\int_0^\infty Tang.\ 2rx.\ \ l\,Cos.\ rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1-e^{-4mr}}{1+e^{-4mr}}\ l\frac{2}{1+e^{-2mr}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (884),$$

$$\int_0^\infty Cot.\ 2rx.\ \ l\,Cos.\ rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}}\ l\frac{1+e^{-2mr}}{2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (885),$$

$$\int_0^\infty Cosec.\ 2rx.\ \ l\,Cos.\ rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}-e^{-2mr}}\ l\frac{1+e^{-2mr}}{2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (886),$$

$$\int_0^\infty \frac{l\,Cos.\ rx}{1-2u\,Cos.\ 2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m(1-u\,e^{-2mr})\ (1-u\,e^{2mr})}\ \Big\{ l\frac{1+e^{-2mr}}{2} -$$

$$- \frac{u}{1-u^2}\ (e^{2mr}-e^{-2mr})\ l(1+u)\Big\} \ \ldots\ldots (887),\ \int_0^\infty Tang.\ 2rx.\ \ l\,Cos.\ rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ mr\ Tang.\ 2mr\ \ldots\ (888),\ \int_0^\infty Cot.\ 2rx.\ l\,Cos.\ rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ mr\ Cot.\ 2mr\ \ldots\ (889),$$

$$\int_0^\infty Cosec.\ 2rx.\ l\,Cos.\ rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ mr\ Cosec.\ 2mr\ \ldots\ (890),\ \int_0^\infty \frac{l\,Cos.\ rx}{1-2u\,Cos.2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2m(1-2u\,Cos.\ 2mr+u^2)}\ \Big\{\frac{2u}{1-u^2}\ Sin.\ 2mr.\ l(1+u)+mr\Big\}\ \ldots\ldots (891),\ \int_0^\infty Tang.\ 2rx.$$

$$l\,Sin.\ rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1-e^{-4mr}}{1+e^{-4mr}}\ l\frac{2}{1-e^{-2mr}}\ \ldots\ (892),\ \int_0^\infty Cot.2rx.\ \ l\,Sin.\ rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ \frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}}\ l\frac{1-e^{-2mr}}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ (893),\ \int_0^\infty Cosec.\ 2rx.\ \ l\,Sin.\ rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{e^{2mr}-e^{-2mr}}\ l\frac{1-e^{-2mr}}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ (894),\ \int_0^\infty \frac{l\,Sin.\ rx}{1-2u\,Cos.\ 2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2m(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})}\ \Big\{ l\frac{1-e^{-2mr}}{2} - \frac{u}{1-u^2}\ (e^{2mr}-e^{-2mr})\ l(1-u)\Big\}\ \ldots\ (895)\ [100],$$

[100] Combinons ces intégrales (892) à (895) avec les intégrales précédentes (884) à (887) par voie d'addition et de soustraction, et nous aurons, lorsque encore dans la somme on prend r au lieu de $2r$:



$$\int_0^\infty Tang.\ 2rx.\ l\,Sin.\ rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ (mr-\tfrac{1}{2}\pi)\ Tang.\ 2mr \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (904),$$

$$\int_0^\infty Cot.\ 2rx.\ l\,Sin.\ rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ (mr-\tfrac{1}{2}\pi)\ Cot.\ 2mr \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (905),$$

$$\int_0^\infty Cosec.\ 2rx.\ l\,Sin.\ rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ (mr-\tfrac{1}{2}\pi)\ Cosec.\ 2mr \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (906),$$

$$\int_0^\infty \frac{l\,Sin.\ rx}{1-2u\,Cos.\ 2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m(1-2u\,Cos.\ 2mr+u^2)}\ \left\{\frac{2u}{1-u^2}\ Sin.\ 2mr.\ l(1-u)+mr-\tfrac{1}{2}\pi\right\}\ \ldots\ (907)\ [101].$$

$$\int_0^\infty Tang.\ 2rx.\ l\,Tang.\ rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1-e^{-4mr}}{1+e^{-4mr}}\ l\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{e^{mr}-e^{-mr}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (896),$$

$$\int_0^\infty Tang.\ rx.\ l(\tfrac{1}{2}\,Sin.\ rx)\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\ l\frac{4}{1-e^{-2mr}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (897),$$

$$\int_0^\infty Cot.\ 2rx.\ l\,Tang.\ rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}}\ l\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (898),$$

$$\int_0^\infty Cot.\ rx.\ l(\tfrac{1}{2}\,Sin.\ rx)\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\ l\frac{1-e^{-2mr}}{4} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (899),$$

$$\int_0^\infty Cosec.\ 2rx.\ l\,Tang.\ rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}-e^{-2mr}}\ l\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (900),$$

$$\int_0^\infty Cosec.\ rx.\ l(\tfrac{1}{2}\,Sin.\ rx)\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{mr}-e^{-mr}}\ l\frac{1-e^{-2mr}}{4} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (901),$$

$$\int_0^\infty \frac{l\,Tang.\ rx}{1-2u\,Cos.\ 2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m(1-u\,e^{-2mr})\ (1-u\,e^{2mr})}\ \left\{l\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{e^{mr}+e^{-mr}}+\right.$$
$$\left.+\frac{u}{1-u^2}\ (e^{2mr}-e^{-2mr})\ l\frac{1+u}{1-u}\right\} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (902),$$

$$\int_0^\infty \frac{l(\tfrac{1}{2}\,Sin.\ rx)}{1-2u\,Cos.\ rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m(1-u\,e^{-mr})\ (1-u\,e^{mr})}\ \left\{l\frac{1-e^{-2mr}}{4}-\right.$$
$$\left.-\frac{u}{1-u^2}\ (e^{mr}-e^{-mr})\ l(1-u^2)\right\}\ \ldots\ldots\ (903).$$

[101] Lorsqu'on prend la somme et la différence de ces intégrales (904) à (907) avec les intégrales précédentes (888) à (891), et que pour la somme on change partout $2r$ en r, on obtient:

$$\int_0^\infty Tang.\ 2rx.\ l\,Tang.\ rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = -\ \tfrac{1}{4}\pi^2\ Tang.\ 2mr \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (908),$$

$$\int_0^\infty Tang.\ rx.\ l(\tfrac{1}{2}\,Sin.\ rx)\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ (mr-\tfrac{1}{2}\pi)\ Tang.\ mr \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (909),$$

$$\int_0^\infty Cot.\ 2rx.\ l\,Tang.\ rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = -\ \tfrac{1}{4}\pi^2\ Cot.\ 2mr \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (910),$$

$$\int_0^\infty Cot.\ rx.\ l(\tfrac{1}{2}\,Sin.\ rx)\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ (mr-\tfrac{1}{2}\pi)\ Cot.\ mr \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (911),$$

43. Nous sommes parvenus à présent aux développements (p) et (q), (t) et (u) du N°. 7; pour ceux-ci on a: $f(\alpha+\beta) = e^{s}$, $f(\alpha+\beta e^{-mr}) = e^{se^{-mr}}$, $f(\alpha+\beta e^{mri}) = e^{s\,Cos.\,mr} \left\{ Cos.\,(s\,Sin.\,mr) + i\,Sin.\,(s\,Sin.\,mr) \right\}$, $f(\alpha+\beta\, e^{-(1-i)mr}) = e^{se^{-mr}\,Cos.\,mr} \left\{ Cos.\,(se^{-mr}\,Sin.\,mr) + i\,Sin.\,(se^{-mr}\,Sin.\,mr) \right\}$; et pour avoir les fonctions $f(\alpha+\beta\, e^{-mri})$, $f(\alpha+\beta\, e^{-(1+i)mr})$ on n'a qu'à prendre $-i$ au lieu de i dans ces deux dernières transformations. De cette manière nous trouverons par les théorèmes (LXXXIII) à (XCV):

$\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx}\, Sin.\,(s\,Sin.\,rx) \dfrac{dx}{x(m^2+x^2)} = \dfrac{\pi}{2m^2} \left(e^{s} - e^{se^{-mr}}\right)$ .... (916),

$\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x + \dots}\, Sin.(s\,Sin.\,rx + s_1 Sin.\,r_1 x + \dots) \dfrac{dx}{x\,(m^2+x^2)} = \dfrac{\pi}{2m^2} \left(e^{s+s_1+\dots} - e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \dots}\right)$ ... (917), $\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx}\, Sin.\,(s\,Sin.\,rx) \dfrac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \dfrac{\pi}{8m^4} \left\{ e^{s} - e^{se^{-mr}\,Cos.\,mr}\, Cos.\,(se^{-mr}\,Sin.\,mr) \right\}$ .... (918), $\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x + \dots}$ $Sin.(s\,Sin.\,rx + s_1 Sin.\,r_1 x + \dots) \dfrac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \dfrac{\pi}{8m^4} \left\{ e^{s+s_1+\dots} - e^{se^{-mr}\,Cos.\,mr + s_1 e^{-mr_1}\,Cos.\,mr_1 + \dots} \right.$ $\left. Cos.(se^{-mr}\,Sin.\,mr + s_1 e^{-mr_1}\,Sin.\,mr_1 + \dots) \right\}$ ... (919), $\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx}\, Sin.(s\,Sin.\,rx) \dfrac{dx}{x(m^2-x^2)} = \dfrac{\pi}{2m^2} \left\{ e^{s} - e^{s\,Cos.\,mr}\, Cos.(s\,Sin.\,mr) \right\}$ .... (920), $\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x + \dots}$ $Sin.\,(s\,Sin.\,rx + s_1 Sin.\,r_1 x + \dots) \dfrac{dx}{x\,(m^2-x^4)} = \dfrac{\pi}{2m^2} \left\{ e^{s+s_1+\dots} - e^{s\,Cos.\,mr + s_1 Cos.\,mr_1 + \dots} \right.$ $\left. Cos.(s\,Sin.\,mr + s_1 Sin.\,mr_1 + \dots) \right\}$ .... (921), $\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx}\, Sin.\,(s\,Sin.\,rx) \dfrac{dx}{x(m^4-x^4)} = \dfrac{\pi}{4m^4} \left\{ 2e^{s} - e^{se^{-mr}} - e^{s\,Cos.\,mr}\, Cos.\,(s\,Sin.\,mr) \right\}$ ... (922), $\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx + s_1 Cos.\,r_1 x + \dots}$ $Sin.(s\,Sin.\,rx + s_1 Sin.\,r_1 x + \dots) \dfrac{dx}{x(m^4-x^4)} = \dfrac{\pi}{4m^4} \left\{ 2e^{s+s_1+\dots} - e^{se^{-mr} + s_1 e^{-mr_1} + \dots} - \right.$

$\int_0^\infty Cosec.\,2rx.\; l\,Tang.\,rx \dfrac{xdx}{m^2-x^2} = -\tfrac{1}{4}\pi^2\, Cosec.\,2mr$ .... (912),

$\int_0^\infty Cosec.\,rx.\; l(\tfrac{1}{2}\,Sin.\,rx) \dfrac{xdx}{m^2-x^2} = \dfrac{\pi}{2} (mr - \tfrac{1}{2}\pi)\; Cosec.\,mr$ .... (913),

$\int_0^\infty \dfrac{l\,Tang.\,rx}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2} \dfrac{dx}{m^2-x^2} = \dfrac{\pi}{m(1-2u\,Cos.\,2mr+u^2)} \left\{ \dfrac{u\,Sin.\,2mr}{1-u^2}\, l\dfrac{1-u}{1+u} - \tfrac{1}{4}\pi \right\}$ ... (914),

$\int_0^\infty \dfrac{l(\frac{1}{2}\,Sin.\,rx)}{1-2u\,Cos.\,rx+u^2} \dfrac{dx}{m^2-x^2} = \dfrac{\pi}{2m(1-2u\,Cos.\,mr+u^2)} \left\{ \dfrac{2u}{1-u^2}\, Sin.\,mr\; l(1-u^2) + mr - \tfrac{1}{2}\pi \right\}$ ... (915).

$$- e^{s Cos. mr + s_1 Cos. mr_1 + \dots} Cos.(s Sin. mr + s_1 Sin. mr_1 + \dots) \Big\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (923).$$

C'est encore pour les théorèmes suivants que nous ne saurions employer que les formules (p) et (q). Or, nous avons ici $f(\alpha + \beta u) = e^{su}$, donc:

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\, Sin.(s Sin. rx)\, \frac{1}{1 - 2u Cos. rx + u^2}\, \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2(1-u)^2}\,(e^s - e^{su}) \dots\dots \quad (924),$$

$$\int_0^\infty \Big\{ 1 - e^{s Cos. rx} Cos.(s Sin. rx) \Big\}\, Tang. rx\, \frac{x dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi e^{s - 2mr}}{1 + e^{-2mr}} + \frac{\pi}{2}\, \frac{1 - e^{-2mr}}{1 + e^{-2mr}}\, e^{se^{-mr}} \dots \quad (925),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\, Sin.(s Sin. rx).\ Tang. rx\, \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m}\, \frac{1 - e^{-2mr}}{1 + e^{-2mr}}\, (e^{se^{-mr}} - e^s) \dots \quad (926),$$

$$\int_0^\infty \Big\{ 1 - e^{s Cos. rx} Cos.(s Sin. rx) \Big\}\, Cot. rx\, \frac{x dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi e^{s - 2mr}}{1 - e^{-2mr}} - \frac{\pi}{2}\, \frac{1 + e^{-2mr}}{1 - e^{-2mr}}\, e^{se^{-mr}} \dots \quad (927),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\, Sin.(s Sin. rx).\ Cot. rx\, \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m}\, \frac{1 + e^{-2mr}}{1 - e^{-2mr}}\, (e^s - e^{se^{-mr}}) \dots \quad (928),$$

$$\int_0^\infty \Big\{ 1 - e^{s Cos. rx} Cos.(s Sin. rx) \Big\}\, Cosec. rx\, \frac{x dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{e^{mr} - e^{-mr}}\, (e^s - e^{se^{-mr}}) \dots \quad (929),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\, Sin.(s Sin. rx).\ Cosec. rx\, \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{m(e^{mr} - e^{-mr})}\, (e^s - e^{se^{-mr}}) \dots \quad (930),$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{s Cos. rx} Cos.(s Sin. rx)}{1 - 2u Cos. rx + u^2}\, \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m(1 - ue^{-mr})(1 - ue^{mr})} \Big\{ e^{se^{-mr}} - \frac{u}{1 - u^2}(e^{mr} - e^{-mr}) e^{su} \Big\}. \quad (931),$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{s Cos. rx}\, Sin.(s Sin. rx)}{1 - 2u Cos. rx + u^2}\, \frac{x dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2(1 - ue^{-mr})(1 - ue^{mr})}\, (e^{se^{-mr}} - e^{su}) \dots \quad (932),$$

$$\int_0^\infty \Big\{ 1 - e^{s Cos. rx} Cos.(s Sin. rx) \Big\}\, Tang. rx\, \frac{x dx}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2} \Big\{ e^s + e^{s Cos. mr} Sin.(s Sin. mr).\ Tang. mr \Big\}. \quad (933),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\, Sin.(s Sin. rx).\ Tang. rx\, \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\, Tang. mr. \Big\{ e^s - e^{s Cos. mr} Cos.(s Sin. mr) \Big\} \dots \quad (934),$$

$$\int_0^\infty \Big\{ 1 - e^{s Cos. rx} Cos.(s Sin. rx) \Big\}\, Cot. rx\, \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \Big\{ e^s - e^{s Cos. mr} Sin.(s Sin. mr).\ Cot. mr \Big\} \dots \quad (935),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\, Sin.(s Sin. rx).\ Cot. rx\, \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\, Cot. mr. \Big\{ e^s - e^{s Cos. mr} Cos.(s Sin. mr) \Big\} \dots \quad (936),$$

$$\int_0^\infty \Big\{ 1 - e^{s Cos. rx} Cos.(s Sin. rx) \Big\}\, Cosec. rx\, \frac{x dx}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2}\, Cosec. mr.\ e^{s Cos. mr} Sin.(s Sin. mr) \dots \quad (937),$$

$$\int_0^\infty e^{s Cos. rx}\, Sin.(s Sin. rx).\ Cosec. rx\, \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\, Cosec. mr. \Big\{ e^s - e^{s Cos. mr} Cos.(s Sin. mr) \Big\} \dots \quad (938),$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{s Cos. rx}\, Cos.(s Sin. rx)}{1 - 2u Cos. rx + u^2}\, \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m(1 - 2u Cos. mr + u^2)} \Big\{ \frac{2u}{1 - u^2}\, Sin. mr.\ e^{su} +$$

$$+ e^{s Cos. mr}\, Sin.(s Sin. mr) \Big\} \dots\dots\dots\dots \quad (939), \quad \int_0^\infty \frac{e^{s Cos. rx}\, Sin.(s Sin. rx)}{1 - 2u Cos. rx + u^2}\, \frac{x dx}{m^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2(1 - 2u Cos. mr + u^2)} \Big\{ e^{su} - e^{s Cos. mr}\, Cos.(s Sin. mr) \Big\} \dots \quad (940).$$

44. Différentions ces formules par rapport à s, comme on l'a appris au N°. 8, et nous aurons:

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\ \mathrm{Sin.}(s\,\mathrm{Sin.}rx+rx)\ \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\ (e^s - e^{se^{-mr}-mr})$ .... (941),

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx+s_1\mathrm{Cos.}r_1x+\dots}\ \mathrm{Sin.}(s\,\mathrm{Sin.}rx+s_1\mathrm{Sin.}r_1x+\dots+r_ax)\ \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\ (e^{s+s_1+\dots} -$
$- e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots-mr_a})$ ..... (942), $\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\ \mathrm{Sin.}(s\,\mathrm{Sin.}rx+rx)\ \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} =$
$= \frac{\pi}{8m^4}\ \{e^s - e^{se^{-mr}\mathrm{Cos.}mr-mr}\ \mathrm{Cos.}(se^{-mr}\ \mathrm{Sin.}mr+mr)\}$ .... (943),

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx+s_1\mathrm{Cos.}r_1x+\dots}\ \mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}rx+s_1\mathrm{Sin.}r_1x+\dots+r_ax)\ \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{8m^4}\ \{e^{s+s_1+\dots} -$
$- e^{se^{-mr}\mathrm{Cos.}mr+s_1e^{-mr_1}\mathrm{Cos.}mr_1+\dots-mr_a}\ \mathrm{Cos.}(se^{-mr}\mathrm{Sin.}mr+s_1e^{-mr_1}\mathrm{Sin.}mr_1+\dots+mr_a)\}$. (944),

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\ \mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}rx+rx)\ \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\ \{e^s - e^{s\mathrm{Cos.}mr}\ \mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}mr+mr)\}$ ... (945),

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx+s_1\mathrm{Cos.}r_1x+\dots}\ \mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}rx+s_1\mathrm{Sin.}r_1x+\dots+r_ax)\ \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\ \{e^{s+s_1+\dots} -$
$- e^{s\mathrm{Cos.}mr+s_1\mathrm{Cos.}mr_1+\dots}\ \mathrm{Cos.}(s\,\mathrm{Sin.}mr + s_1\mathrm{Sin.}mr_1 + \dots + mr_a)\}$ ... (946), $\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}$
$\mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}rx+rx)\ \frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\ \{2e^s - e^{se^{-mr}-mr} - e^{s\mathrm{Cos.}mr}\ \mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}mr+mr)\}$. (947),

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx+s_1\mathrm{Cos.}r_1x+\dots}\ \mathrm{Sin.}(s\mathrm{Sin.}rx+s_1\mathrm{Sin.}r_1x+\dots+r_ax)\ \frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\ \{2e^{s+s_1+\dots} -$
$- e^{se^{-mr}+s_1e^{-mr_1}+\dots-mr_a} - e^{s\mathrm{Cos.}mr+s_1\mathrm{Cos.}mr_1+\dots}\ \mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}mr+s_1\mathrm{Sin.}mr_1+\dots+mr_a)\}$. (948),

$\int_0^\infty \frac{e^{s\mathrm{Cos.}rx}\ \mathrm{Sin.}(s\,\mathrm{Sin.}rx+rx)}{1-2u\mathrm{Cos.}rx+u^2}\ \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2(1-u)^2}\ (e^s - ue^{su})$ .... (949), $\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}$
$\mathrm{Cos.}(s\,\mathrm{Sin.}rx+rx).\ \mathrm{Tang.}rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = -\pi\ \frac{e^{s-2mr}}{1+e^{-2mr}} - \frac{\pi}{2}\ \frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\ e^{se^{-mr}-mr}$ ... (950),

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\ \mathrm{Sin.}(s\,\mathrm{Sin.}rx+rx).\ \mathrm{Tang.}rx\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\ \frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\ (e^{se^{-mr}-mr} - e^s)$ ... (951),

$\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\ \ \mathrm{Cos.}(s\,\mathrm{Sin.}rx+rx).\ \ \mathrm{Cot.}rx\ \ \frac{xdx}{m^2+x^2} = -\ \pi\ \frac{e^{s-2mr}}{1-e^{-2mr}} +$
$+ \frac{\pi}{2}\ \frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\ e^{se^{-mr}-mr}$ ..... (952), $\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\ \mathrm{Sin.}(s\,\mathrm{Sin.}rx+rx).\ \mathrm{Cot.}rx\ \frac{dx}{m^2+x^2} =$
$= \frac{\pi}{2m}\ \frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\ (e^s - e^{se^{-mr}-mr})$ ...... (953), $\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}\ \ \mathrm{Cos.}(s\,\mathrm{Sin.}rx + rx).$
$\mathrm{Cosec.}rx\ \ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{mr}-e^{-mr}}\ \ (e^s - e^{se^{-mr}-mr})$ .... (954), $\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}rx}$

$Sin.(s Sin.\, rx + rx).\ Cosec.\, rx \ \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{m(e^{mr} - e^{-mr})} \left(e^s - e^{se^{-mr} - mr}\right)$ .... (955),

$\int_0^\infty \frac{e^{s Cos.\, rx}\ Cos.\,(s Sin.\, rx + rx)}{1 - 2u\, Cos.\, rx + u^2} \ \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m(1 - u e^{-mr})\ (1 - u e^{mr})} \left\{ e^{se^{-mr} - mr} - \right.$

$\left. - \frac{u^2}{1 - u^2} (e^{mr} - e^{-mr})\, e^{su} \right\}$ .... (956), $\int_0^\infty \frac{e^{s Cos.\, rx}\ Sin.\,(s Sin.\, rx + rx)}{1 - 2u\, Cos.\, rx + u^2} \ \frac{x dx}{m^2 + x^2} =$

$= \frac{\pi}{2(1 - u e^{-mr})\ (1 - u e^{mr})} \left(e^{se^{-mr} - mr} - u e^{su}\right)$ .... (957), $\int_0^\infty e^{s Cos.\, rx}$

$Cos.(s Sin.\, rx + rx).\ Tang.\, rx \ \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \left\{ e^s + e^{s Cos.\, mr} Sin.(s Sin.\, mr + mr).\ Tang.\, mr \right\}$ ... (958),

$\int_0^\infty e^{s Cos.\, rx}\ Sin.\,(s Sin.\, rx + rx).\ \ Tang.\, rx \ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Tang.\, mr. \left\{ e^s - e^{s Cos.\, mr} \right.$

$\left. Cos.(s Sin.\, mr + mr) \right\}$ ... (959), $\int_0^\infty e^{s Cos.\, rx}\ \ Cos.\,(s Sin.\, rx + rx).\ \ Cot.\, rx \ \frac{x dx}{m^2 - x^2} =$

$= \frac{\pi}{2} \left\{ e^{s Cos.\, mr}\ Sin.\,(s Sin.\, mr + mr).\ Cot.\, mr - e^s \right\}$ .... (960), $\int_0^\infty e^{s Cos.\, rx}$

$Sin.(s Sin.\, rx + rx).\ Cot.\, rx \ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Cot.\, mr. \left\{ e^s - e^{s Cos.\, mr}\, Cos.(s Sin.\, mr + mr) \right\}$ ... (961),

$\int_0^\infty e^{s Cos.\, rx}\ \ Cos.\,(s Sin.\, rx + rx).\ \ Cosec.\, rx \ \ \frac{x dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2}\ e^{s Cos.\, mr}\ \ Cosec.\, mr.$

$Sin.\,(s Sin.\, mr + mr)$ ..... (962), $\int_0^\infty e^{s Cos.\, rx}\ \ Sin.\,(s Sin.\, rx + rx).\ Cosec.\, rx \ \frac{dx}{m^2 - x^2} =$

$= \frac{\pi}{2}\ \ Cosec.\, mr. \left\{ e^s - e^{s Cos.\, mr}\ \ Cos.\,(s Sin.\, mr + mr) \right\}$ .... (963),

$\int_0^\infty \frac{e^{s Cos.\, rx}\ Cos.\,(s Sin.\, rx + rx)}{1 - 2u Cos.\, rx + u^2} \ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m(1 - 2u\, Cos.\, mr + u^2)} \left\{ \frac{2u^2}{1 - u^2}\ e^{su}\ Sin.\, mr + \right.$

$\left. + e^{s Cos.\, mr}\ Sin.\,(s Sin.\, mr + mr) \right\}$ .... (964), $\int_0^\infty \frac{e^{s Cos.\, rx}\ Sin.\,(s Sin.\, rx + rx)}{1 - 2u\, Cos.\, rx + u^2} \ \frac{x dx}{m^2 - x^2} =$

$= \frac{\pi}{2(1 - 2u\, Cos.\, mr + u^2)} \left\{ u e^{su} - e^{s Cos.\, mr}\ Cos.\,(s Sin.\, mr + mr) \right\}$ ... (965).

45. Suivent les développements du N°. 10, qui se laissent résumer dans les équations (ad) et (ae), et l'on devra employer par conséquent ces dernières pour les théorèmes (LXXXVIII) à (XCV). Comme on a $f(\alpha + \beta) = 0$, $f(\alpha + \beta e^{-mr}) =$ $= (1 + e^{-mp})^q\ (1 - e^{-mr})^s\ e^{te^{-mu}}$, $f(\alpha + \beta e^{mri}) = 2^{q+s}\ Cos.^q \tfrac{1}{2} mp.\ Sin.^s \tfrac{1}{2} mr.\ e^{t Cos.\, mu}$ $[Cos. \{ \tfrac{1}{2} s\pi - (qp + sr)m - t Sin.\, mu \} + i Sin. \{ \tfrac{1}{2} s\pi - (qp - sr)m - t Sin.\, mu \}]$ et $f(\alpha + \beta e^{-(1-i)mr}) =$ $= (1 + 2e^{-mp}\ Cos.\, mp + e^{-2mp})^{\frac{1}{2}q}\ (1 - 2e^{-mr}\ Cos.\, mr + e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}\ e^{te^{-mu}\ Cos.\, mu}$

$$[Cos. \Big\{ q\, Arctg \left(\frac{Sin.\, mp}{e^{mp} + Cos.\, mp} \right) - s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, mr}{e^{mr} - Cos.\, mr} \right) + te^{-mu}\, Sin.\, mu \Big\} +$$

$$+ i\, Sin. \Big\{ q\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, mp}{e^{mp} + Cos.\, mp} \right) - s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, mr}{e^{mr} - Cos.\, mr} \right) + te^{-mu}\, Sin.\, mu \Big\}]$$ et

que les fonctions $f(\alpha+\beta e^{-mri})$, $f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr})$ se déduisent de celles-ci par le changement de i en $-i$, nous aurons (en doublant les r):

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots}\ Sin. \Big\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi -$$

$$- (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t\, Sin.\, ux - t_1\, Sin.\, u_1 x - \ldots \Big\} \frac{dx}{x(m^2+x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+1} m^2} (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots$$

$$e^{te^{-mu} + t_1 e^{-mu_1} + \ldots} \ldots (966),\ \int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots}$$

$$Sin. \Big\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi - (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t Sin.\, ux - t_1 Sin.\, u_1 x - \ldots \Big\} \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+3} m^4} (1+2e^{-2mp}\, Cos.\, 2mp + e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q} (1+2e^{-2mp_1}\, Cos.\, 2mp_1 +$$

$$+ e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1} \ldots (1-2e^{-2mr}\, Cos.\, 2mr + e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s} (1-2e^{-2mr_1}\, Cos.\, 2mr_1 + e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1} \ldots$$

$$e^{te^{-mu} Cos.\, mu + t_1 e^{-mu_1} Cos.\, mu_1 + \ldots}\quad Cos. \Big\{ q\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mp}{e^{2mp} + Cos.\, 2mp} \right) +$$

$$+ q_1\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mp_1}{e^{2mp_1} + Cos.\, 2mp_1} \right) + \ldots - s\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr}{e^{2mr} - Cos.\, 2mr} \right) -$$

$$- s_1\, Arctg. \left(\frac{Sin.\, 2mr_1}{e^{2mr_1} - Cos.\, 2mr_1} \right) - \ldots + te^{-mu}\, Sin.\, mu + t_1 e^{-mu_1}\, Sin.\, mu_1 + \ldots \Big\} \ldots (967),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots}\ Sin. \Big\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi -$$

$$- (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t\, Sin.\, ux - t_1\, Sin.\, u_1 x - \ldots \Big\} \frac{dx}{x(m^2-x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2m^2} Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots\ Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots\ e^{t Cos.\, mu + t_1 Cos.\, mu_1 + \ldots}\ Cos. \Big\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi -$$

$$- (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)m - t\, Sin.\, mu - t_1\, Sin.\, mu_1 - \ldots \Big\} \ldots\ldots\ldots (968),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1 x \ldots\ Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1 x \ldots\ e^{t Cos.\, ux + t_1 Cos.\, u_1 x + \ldots}\ Sin. \Big\{ (s+s_1+\ldots) \tfrac{1}{2}\pi -$$

$$- (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x - t\, Sin.\, ux - t_1\, Sin.\, u_1 x - \ldots \Big\} \frac{dx}{x(m^4-x^4)} =$$

$$= \frac{\pi}{4m^4} \Big\{ 2^{-q-q_1-\ldots-s-s_1-\ldots} (1+e^{-2mp})^q (1+e^{-2mp_1})^{q_1} \ldots (1-e^{-2mr})^s (1-e^{-2mr_1})^{s_1} \ldots$$

$e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots} + Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \dots\ Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \dots\ e^{t\,Cos.\,mu+t_1 Cos.\,mu_1+\dots}$
$Cos.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots)m-t\,Sin.\,mu-t_1\,Sin.\,mu_1-\dots\} \dots (969).$

Pour les théorèmes suivants on peut se servir encore des équations (ad) et (ae) pourvu qu'on se borne à un seul q, un seul s, un seul t; or, c'est ce qui suit de la remarque faite plus haut. On en conclut encore, qu'il faut prendre ici $p=r$, $r=r$ et $u=2r$, puisqu'on doit doubler les r dans les développements; tandis que les r dans les théorèmes doivent être remplacés par $2r$. Encore est-il $f(\alpha+\beta u) = (1+u)^q (1-u)^s e^{tu}$. Puis souvenons-nous de la remarque faite à la fin du N°. 41 sur l'influence du facteur $Sin.^s rx$ sur la disparition de la fonction $f(\alpha+\beta)$: alors il est clair que les développements (ad) et (ae) comprennent bien les formules précédentes spéciales (ab) et (ac) comme des cas particuliers pour la valeur zéro de p, mais que les autres formules (x) et (y) ne sauraient en être déduites, vu qu'il n'est pas permis d'y prendre s égal à zéro. Par conséquent puisque pour ces derniers développements $f(\alpha+\beta) = 2^s e^t$, ils donnent:

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos\,2rx}\,\frac{Sin.(srx+t\,Sin.\,2rx)}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}(1-u)^2}\{2^s e^t-(1+u)^s e^{tu}\} \dots (970),$$

$$\int_0^\infty [1-Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.(srx+t\,Sin.\,2rx)]\ Tang.\,2rx\,\frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi e^{-4mr+t}}{1+e^{-4mr}} + \frac{\pi}{2^{s+1}}\,\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-4mr}}\,(1+e^{-2mr})^{s+1}\,e^{te^{-2mr}} \dots (971),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.(srx+t\,Sin.\,2rx).\ Tang.\,2rx\,\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}m}\,\frac{1-e^{-4mr}}{1+e^{-4mr}}\{(1+e^{-2mr})^s e^{te^{-2mr}}-2^s e^t\} \dots (972),$$

$$\int_0^\infty [1-Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.(srx+t\,Sin.\,2rx)]\ Cot.\,2rx\,\frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi e^{-4mr+t}}{1-e^{-4mr}} - \frac{\pi}{2^{s+1}}\,\frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-2mr}}\,(1+e^{-2mr})^{s-1}\,e^{te^{-2mr}} \dots (973),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.(srx+t\,Sin.\,2rx).\ Cot.\,2rx\,\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}m}\,\frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}}\{2^s e^t-(1+e^{-2mr})^s e^{te^{-2mr}}\} \dots (974),$$

$$\int_0^\infty [1-Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.(srx+t\,Sin.\,2rx)]\ Cosec.\,2rx\,\frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^s(e^{2mr}-e^{-2mr})}\{2^s e^t-(1+e^{-2mr})^s e^{te^{-2mr}}\} \dots (975),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.(srx+t\,Sin.\,2rx).\ Cosec.\,rx\,\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s-1}m\,(e^{2mr}-e^{-2mr})}\{2^s e^t-(1+e^{-2mr})^s e^{te^{-2mr}}\} \dots (976),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\,\frac{Cos.(srx+t\,Sin.\,2rx)}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\,\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}m(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})}\left\{(1+e^{-2mr})^s e^{te^{-2mr}}-\frac{u}{1-u}(e^{2mr}-e^{-2mr})(1+u)^{s-1}e^{tu}\right\}. (977),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx. e^{t\,Cos.\,2rx} \frac{Sin.(srx + t\,Sin.\,2rx)}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2} \frac{x\,dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})} \{(1+e^{-2mr})^s e^{te^{-2mr}} - (1+u)^s e^{tu}\} \quad \ldots\ldots (978),$$

$$\int_0^\infty [1 - Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.(srx + t\,Sin.\,2rx)]\ Tang.\,2rx \frac{x\,dx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\{e^t + Tang.\,2mr.\ Cos.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Sin.(smr + t\,Sin.\,2mr)\} \quad \ldots (979),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.(srx + t\,Sin.\,2rx).\ Tang.\,2rx \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Tang.\,2mr.\ \{e^t - Cos.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Cos.(smr + t\,Sin.\,2mr)\} \quad \ldots\ldots (980),$$

$$\int_0^\infty [1 - Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.(srx + t\,Sin.\,2rx)]\ Cot.\,2rx \frac{x\,dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\{e^t - Cot.\,2mr.\ Cos.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Sin.(smr + t\,Sin.\,2mr)\} \quad \ldots\ldots (981),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.(srx+t\,Sin.\,2rx).\ Cot.\,2rx \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Cot.\,2mr.\{e^t - Cos.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Cos.(smr+t\,Sin.\,2mr)\}. \quad (982),$$

$$\int_0^\infty [1 - Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.(srx + t\,Sin.\,2rx)]\ Cosec.\,2rx \frac{x\,dx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{4}\ Cosec.\ mr.\ Cos.^{s-1} mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Sin.(smr + t\,Sin.\,2mr) \quad \ldots\ldots (983),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.(srx + t\,Sin.\,2rx).\ Cosec.\ rx \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{m}\ Cosec.\ 2mr.\ \{e^t - Cos.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Cos.(smr + t\,Sin.\,2mr)\} \quad \ldots (984),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx} \frac{Cos.(srx + t\,Sin.\,2rx)}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2} \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}m(1-2u\,Cos.\,2mr+u^2)} \left\{\frac{2u}{1-u}\ Sin.\,2mr\ (1+u)^{s-1}\ e^{tu} + 2^s\,Cos.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Sin.(smr + t\,Sin.\,2mr)\right\} \quad \ldots (985),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx} \frac{Sin.(srx + t\,Sin.\,2rx)}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2} \frac{x\,dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}(1-2u\,Cos.\,2mr+u^2)} \{(1+u)^s\ e^{tu} - 2^s\ Cos.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Cos.(smr + t\,Sin.\,2mr)\} \quad \ldots (986).$$

Maintenant passons aux développements généraux (ad), (ae); ils nous fournissent les résultats:

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx} \frac{Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)rx - t\,Sin.\,2rx\}}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{q+s+1}} (1+u)^q (1-u)^{s-2}\ e^{tu} \quad \ldots\ldots (987),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.\{\tfrac{1}{2}s\pi - (q+s)rx - t\,Sin.\,2rx\}.\ Tang.\,2rx \frac{x\,dx}{m^2+x^2} = -\frac{\pi}{2^{q+s+1}} \frac{1}{1+e^{-4mr}} (1+e^{-2mr})^{q+1}$$

$(1-e^{-2mr})^{s+1}\, e^{te^{-2mr}}$ ... (988), $\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t Cos. 2rx}\ Sin. \{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s) rx -$
$- t Sin.\ 2rx \}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2+x^2} = - \frac{\pi}{2^{q+s+1} m} \frac{1}{1+e^{-4mr}} (1+e^{-2mr})^{q+1}$
$(1-e^{-2mr})^{s+1}\, e^{te^{-2mr}}$ ... (989), $\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t Cos. 2rx}\ Cos. \{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s) rx -$
$- t Sin.\ 2rx \}.\ Cot.\ 2rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+s+1}} (1+e^{-4mr}) (1+e^{-2mr})^{q-1}$
$(1-e^{-2mr})^{s-1}\, e^{te^{-2mr}}$ ... (990), $\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t Cos. 2rx}\ Sin. \{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s) rx -$
$- t Sin.\ 2rx \}.\ Cot.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{q+s+1} m} (1+e^{-4mr}) (1+e^{-2mr})^{q-1}$
$(1-e^{-2mr})^{s-1}\, e^{te^{-2mr}}$ .... (991), $\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx.\ e^{t Cos. 2rx}\ Cos. \{ \frac{1}{2} s\pi -$
$- (q+s) rx - t Sin.\ 2rx)\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi e^{-2mr}}{2^{q+s-1}} (1+e^{-2mr})^{q-1} (1-e^{-2mr})^{s-1} e^{te^{-2mr}}$ ... (992),
$\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx.\ e^{t Cos. 2rx}\ Sin. \{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s) rx - t Sin.\ 2rx \}\ \frac{dx}{m^2+x^2} =$
$= \frac{\pi e^{-2mr}}{2^{q+s-1} m} (1+e^{-2mr})^{q-1} (1-e^{-2mr})^{s-1} e^{te^{-2mr}}$ .... (993), $\int_0^\infty Cos.^q rx.$
$Sin.^s rx.\ e^{t Cos.\ 2rx}\ \frac{Cos. \{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s) rx - t Sin.\ 2rx \}}{1 - 2u Cos.\ 2rx + u^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2} =$
$= \frac{\pi}{2^{q+s+1} m\, (1-u e^{-2mr})\, (1-u e^{2mr})} \{ (1+e^{-2mr})^q\ (1-e^{-2mr})^s\ e^{te^{-2mr}} -$
$- u (1+u)^{q-1} (1-u)^{s-1}\ e^{tu}\ (e^{2mr} - e^{-2mr}) \}$ .... (994), $\int_0^\infty Cos.^q rx.$
$Sin.^s rx.\ e^{t Cos.\ 2rx}\ \frac{Sin. \{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s) rx - t Sin.\ 2rx \}}{1 - 2u Cos.\ 2rx + u^2}\ \frac{xdx}{m^2+x^2} =$
$= \frac{\pi}{2^{q+s+1}\, (1-u e^{-2mr})\, (1-u e^{2mr})} \{ (1+u)^q\ (1-u)^s\ e^{tu} - (1+e^{-2mr})^q$
$(1-e^{-2mr})^s\ e^{te^{-2mr}} \}$ .... (995), $\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t Cos.\ 2rx}\ Cos. \{ \frac{1}{2} s\pi -$
$- (q+s) rx - t Sin.\ 2rx \}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ Tang.\ 2mr.\ Cos.^q mr.$
$Sin.^s mr.\ e^{t Cos. 2mr}\ Sin. \{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s) mr - t Sin. 2mr \}$ ... (996), $\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t Cos. 2rx}$
$Sin. \{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s) rx - t Sin.\ 2rx \}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Tang.\ 2mr.\ Cos.^q mr.$

$$\mathrm{Sin.}^{s} mr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mr}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mr\right\}\ \ldots\ (997),\quad \int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}.\ \mathrm{Cot.}\,2rx\ \frac{x\,dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2}\ \mathrm{Cot.}\,2mr.\ \mathrm{Cos.}^{q}mr.\ \mathrm{Sin.}^{s}mr.$$

$$e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mr}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mr\right\}\ \ldots\ldots\ (998),\quad \int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\ 2rx\right\}.\ \mathrm{Cot.}\ 2rx\ \frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\ \mathrm{Cot.}\ 2mr.\ \mathrm{Cos.}^{q} mr.\ \mathrm{Sin.}^{s} mr.$$

$$e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mr}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mr\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (999),\quad \int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}\ \frac{x\,dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} mr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} mr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mr}$$

$$\mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mr\right\}\ \ldots\ldots\ (1000),\quad \int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\ 2rx\right\}\ \frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} mr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} mr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mr}$$

$$\mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mr\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (1001),\quad \int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \frac{\mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}}{1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m(1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2mr+u^2)}\ [2^{-q-s+1}\ u(1+u)^{q-1}$$

$$(1-u)^{s-1}\,e^{tu}\,\mathrm{Sin.}\,2mr+\mathrm{Cos.}^{q}mr.\ \mathrm{Sin.}^{s}mr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mr}\,\mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr-t\,\mathrm{Sin.}\,2mr\right\}]\ \ldots\ (1002),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \frac{\mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\ 2rx\right\}}{1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2rx+u^2}\ \frac{x\,dx}{m^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2mr+u^2)}\ [\mathrm{Cos.}^{q} mr.\ \mathrm{Sin.}^{s} mr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mr}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mr-\right.$$

$$\left.-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mr\right\}-2^{-q-s}\ (1+u)^{q}\ (1-u)^{s}\ e^{tu}]\ \ldots\ (1003).$$

46. On peut différentier à présent les intégrales du dernier Numéro respectivement par rapport à une des constantes t_a, ou à la constante t seule, comme on l'a fait aussi précédemment. Ainsi l'on introduira sous les signes trigonométriques *Sinus* ou *Cosinus* dans la fonction polynôme un terme $2rx$, et de telle sorte on obtiendra des formules, qui, après l'évanouissement des t ou du t, donneront lieu à des intégrales simples, générales, comme ce même procédé en a fourni de même plus haut. Il viendra successivement:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q} px.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} p_1x\ldots\ \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1x\ldots\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,ux+t_1\mathrm{Cos.}\,u_1x+\ldots}\ \mathrm{Sin.}\left\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi-\right.$$

$$\left.-(qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_a)x-t\,\mathrm{Sin.}\,ux-t_1\mathrm{Sin.}\,vx-\ldots\right\}\ \frac{dx}{x(m^2+x^2)}=$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}m^2}(1+e^{-2mp})^q(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-mu_a}\dots\dots\dots(1004),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots e^{tCos.ux+t_1Cos.u_1x+\dots} Sin.\{(s+s+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x-tSin.ux-t_1Sin.u_1x-\dots\}\frac{dx}{x(m^4+x^4)} = \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+3}m^4}(1+2e^{-2mp}Cos.2mp+e^{-4mp})^{\frac{1}{2}q}(1+2e^{-2mp_1}Cos.2mp_1+e^{-4mp_1})^{\frac{1}{2}q_1}\dots(1-2e^{-2mr}Cos.2mr+e^{-4mr})^{\frac{1}{2}s}(1-2e^{-2mr_1}Cos.2mr_1+e^{-4mr_1})^{\frac{1}{2}s_1}\dots e^{te^{-mu}Cos.mu+t_1e^{-mu_1}Cos.mu_1+\dots-mu_a}Cos.\left\{qArctg.\left(\frac{Sin.2mp}{e^{2mp}+Cos.2mp}\right)+q_1Arctg.\left(\frac{Sin.2mp_1}{e^{2mp_1}+Cos.2mp_1}\right)+\dots-sArctg.\left(\frac{Sin.2mr}{e^{2mr}-Cos.2mr}\right)-s_1Arctg.\left(\frac{Sin.2mr_1}{e^{2mr_1}-Cos.2mr_1}\right)-\dots+te^{-mu}Cos\ mu+t_1e^{-mu_1}Sin.mu_1+\dots-mu_a\right\}\dots(1005),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots e^{tCos.ux+t_1Cos.u_1x+\dots} Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x-tSin.ux-t_1Sin.u_1x-\dots\}\frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1}mp_1\dots Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1}mr_1\dots e^{tCos.mu+t_1Cos.mu_1+\dots}Cos.\{(s+s+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x-tSin.mu-t_1Sin.mu_1-\dots\}\dots(1006),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots e^{tCos.ux+t_1Cos.u_1x+\dots} Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)x-tSin.ux-t_1Sin.u_1x-\dots\}\frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\Big[2^{-q-q_1-\dots-s-s_1-\dots}(1+e^{-2mp})^q(1+e^{-2mp_1})^{q_1}\dots(1-e^{-2mr})^s(1-e^{-2mr_1})^{s_1}\dots e^{te^{-mu}+t_1e^{-mu_1}+\dots-mu_a}+Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1}mp_1\dots Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1}mr_1\dots e^{tCos.mu+t_1Cos\ mu_1+\dots}Cos.\{\tfrac{1}{2}(s+s_1+\dots)\pi-(qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a)m-tSin.mu-t_1Sin.mu_1-\dots\}\Big].(1007),\ [102]$$

---

[102] Pour en déduire des formules spéciales, commençons par annuler tous les t, et supposons tout de suite $qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots+u_a=t$, où ce t est de tout autre nature que les t, qui viennent de s'évanouir; alors nous trouvons après quelques réductions faciles, pour $t > qp+q_1p_1+\dots+sr+s_1r_1+\dots$:

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\}\frac{dx}{x(m^2+x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\dots+s+s_1+\dots+1}m^2}(e^{mp}+e^{-mp})^q(e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1}\dots(e^{mr}-e^{-mr})^s(e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1}\dots e^{-mt}\dots(1008),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1}p_1x\dots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1}r_1x\dots Sin.\{(s+s_1+\dots)\tfrac{1}{2}\pi-tx\}\frac{dx}{x(4m^4+x^4)} =$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\ e^{t\,Cos.2rx} \frac{Sin.\{(s+2)rx + t\,Sin.2rx\}}{1-2u\,Cos.2rx+u^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{s+1}(1-u)^2} \{2^s e^t - u(1+u)^s e^{tu}\} \ldots (1020),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx.\quad e^{t\,Cos.2rx}\quad Cos.\{(s+2)rx + t\,Sin.\,2rx\}.\quad Tang.\,2rx\ \frac{x\,dx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{q+q_1+\ldots+s+s_1+\ldots+3} m^2} (e^{2mp} + 2\,Cos.\,2mp + e^{-2mp})^{\frac{1}{2}q} (e^{2mp_1} + 2\,Cos.\,2mp_1 + e^{-2mp_1})^{\frac{1}{2}q_1} \ldots$$

$$(e^{2mr} - 2\,Cos.\,2mr + e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s} (e^{2mr_1} - 2\,Cos.\,2mr_1 - e^{-2mr_1})^{\frac{1}{2}s_1} \ldots e^{-mt}\,Cos.\Big\{q\,Arctg.\Big(\frac{Sin.\,2mp}{e^{2mp}+Cos.\,2mp}\Big) +$$

$$+ q_1\ Arctg.\Big(\frac{Sin.\,2mp_1}{e^{2mp_1} + Cos.\,2mp_1}\Big) + \ldots - s\ Arctg.\Big(\frac{Sin.\,2mr}{e^{2mr} - Cos.\,2mr}\Big) -$$

$$- s_1\ Arctg.\Big(\frac{Sin.\,2mr_1}{e^{2mr_1} - Cos.\,2mr_1}\Big) - \ldots + (qp+q_1p_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots-t)m\Big\} \ldots (1009),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x \ldots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1x \ldots Sin.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - tx\}\ \frac{dx}{x(m^2-x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2m^2}\ Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1 \ldots Cos.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - mt\} \ldots (1010),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Cos.^{q_1} p_1x \ldots Sin.^s rx.\ Sin.^{s_1} r_1x \ldots Sin.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - tx\}\ \frac{dx}{x(m^2-x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{4m^2}\ \{2^{-q-q_1-\ldots-s-s_1-\ldots} (e^{mp}+e^{-mp})^q (e^{mp_1}+e^{-mp_1})^{q_1} \ldots (e^{mr}-e^{-mr})^s (e^{mr_1}-e^{-mr_1})^{s_1} \ldots e^{-mt} +$$

$$+ Cos.^q mp.\ Cos.^{q_1} mp_1 \ldots Sin.^s mr.\ Sin.^{s_1} mr_1\ Cos.\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - mt\}\} \ldots (1011).$$

Puis faisons disparaître tantôt tous les s_a et encore tous les q_a sauf q; tantôt tous les q_a et encore tous les s_a hormis s seul; et nous obtiendrons:

$$\int^\infty Cos.^q px.\ Sin.\,tx\ \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = - \frac{\pi}{2^{q+1} m^2} (e^{mp}+e^{-mp})^q\ e^{-mt} \ldots\ldots\ldots\ldots (1012),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Sin.\,tx\ \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = - \frac{\pi}{2^{q+3} m^2} (e^{2mp} + 2\,Cos.\,2mp + e^{-2mp})^{\frac{1}{2}q}\ e^{-mt}$$

$$Cos.\Big\{q\ Arctg.\Big(\frac{Sin.\,2mp}{e^{2mp} + Cos.\,2mp}\Big) - m(t-qp)\Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1013),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Sin.\,tx\ \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = - \frac{\pi}{2m^2}\ Cos.^q mp.\ Cos.\,mt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1014),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q px.\ Sin.\,tx\ \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = - \frac{\pi}{4m^2}\ \{2^{-q} (e^{mp} + e^{-mp})^q\ e^{-mt} +$$

$$+ Cos.^q mp.\ Cos.\,mt\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1015),$$ (où partout on a $t > pq$),

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\ \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2^{s+1} m^2} (e^{mr} - e^{-mr})^s\ e^{-mt} \ldots\ldots\ldots (1016),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\ \frac{dx}{x(4m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2^{s+3} m^2} (e^{2mr} - 2\,Cos.\,2mr + e^{-2mr})^{\frac{1}{2}s}\ e^{-mt}$$

$$= - \frac{\pi e^{-4mr+t}}{1+e^{-4mr}} - \frac{\pi}{2^{s+1}} \frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-4mr}} (1+e^{-2mr})^{s+1} \; e^{te^{-2mr}-2mr} \ldots\ldots\ldots\ldots (1021),$$

$$\int_0^\infty Cos.^s rx. \; e^{t\,Cos.\,2rx} \; Sin.\{(s+2)rx + t\,Sin.\,2rx\}. \; Tang.\,2rx \; \frac{dx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+1}m} \frac{1-e^{-4mr}}{1+e^{-4mr}} \{(1+e^{-2mr})^s \, e^{te^{-2mr}-2mr} - 2^s e^t\} \ldots\ldots (1022), \int_0^\infty Cos.^s rx.$$

$$e^{t\,Cos.\,2rx} \; Cos.\{(s+2)rx + t\,Sin.\,2rx\}. \; Cot.\,2rx \; \frac{xdx}{m^2+x^2} = - \frac{\pi e^{t-4mr}}{1-e^{-4mr}} +$$

$$+ \frac{\pi}{2^{s+1}} \frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-2mr}} (1+e^{-2mr})^{s-1} \, e^{te^{-2mr}-2mr} \ldots\ldots\ldots (1023), \int_0^\infty Cos.^s rx. \; e^{t\,Cos.\,2rx}$$

$$Sin.\{(s+2)rx + t\,Sin.\,2rx\}. \; Cot.\,2rx \; \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}m} \frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}} \{2^s e^0 -$$

$$- (1+e^{-2mr})^s \, e^{te^{-2mr}-2mr}\} \ldots (1024), \int_0^\infty Cos.^{s-1} rx. \; e^{t\,Cos.\,2rx} \; Cos.\{(s+2)rx +$$

$$+ t\,Sin.\,2rx\}.\,Cosec.\,rx \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s-1}(e^{2mr}+e^{-2mr})} \{2^s e^t - (1+e^{-2mr})^s \, e^{te^{-2mr}-2mr}\}] \ldots (1025),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx. \; e^{t\,Cos.\,2rx} \; Sin.\{(s+2)rx + t\,Sin.\,2rx\}. \; Cosec.\,rx \; \frac{dx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{s-1}m(e^{2mr}-e^{-2mr})} \{2^s e^t - (1+e^{-2mr})^s \, e^{te^{-2mr}-2mr}\} \ldots (1026), \int_0^\infty Cos.^s rx.$$

$$e^{t\,Cos.2rx} \frac{Cos.\{(s+2)rx + t\,Sin.\,2rx\}}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}m(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})} \{(1+e^{-2mr})^s$$

$$e^{te^{-2mr}-2mr} - \frac{2u^2}{1-u} (e^{2mr}-e^{-2mr}) \; (1+u)^{s-1} \; e^{tu}\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1027), \int_0^\infty Cos.^s rx.$$

$$e^{t\,Cos.2rx} \frac{Sin.\{(s+2)rx + t\,Sin.\,2rx\}}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2} \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})} \{(1+e^{-2mr})^s$$

$$e^{te^{-2mr}-2mr} - u(1+u)^s \, e^{tu}\} \ldots (1028), \; [103] \int_0^\infty Cos.^s rx. \; e^{t\,Cos.\,2rx} \; Cos.\{(s+2)rx +$$

$$Cos.\left\{ s\,Arctg.\left(\frac{Sin.\,2mr}{e^{2mr} - Cos.\,2mr}\right) + m(t-sr)\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1017),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - tx) \; \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2} \; Sin.^s mr. \; Cos.(\tfrac{1}{2}s\pi - mt) \ldots\ldots\ldots (1018),$$

$$\int_0^\infty Sin.^s rx. \; Sin.(\tfrac{1}{2}s\pi - tx) \; \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{4m^2} \{2^{-s} \; (e^{mr} - e^{-mr})^s \; e^{-mt} + Sin.^s mr.$$

$Cos.(\frac{1}{2}s\pi - mt)\}$ ... (1019), (où partout il est $t > sr$).

[103] Dans ces intégrales annulons la constante t, et puis substituons $s-1$ au lieu de s; nous aurons:

$+ \, t \, Sin. \, 2rx \}. \; Tang. \, 2rx \, \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \, [e^t + Tang. \, 2mr. \; Cos.^s mr. \; e^{t \, Cos. \, 2mr}$ $Sin. \{(s+2)mr + t \, Sin. \, 2mr\}] \; \ldots\ldots \; (1038), \; \int_0^\infty Cos.^s rx. \; e^{t \, Cos. \, 2rx} \; Sin. \{(s+2)rx +$ $+ \, t \, Sin. \, 2rx\}. \; Tang. \, 2rx \, \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \, Tang. \, 2mr. \; [e^t - Cos.^s mr. \; e^{t \, Cos. \, 2mr}$ $Cos. \{(s+2)mr + t \, Sin. \, 2mr\}] \; \ldots\ldots \; (1039), \; \int_0^\infty Cos.^s rx. \; e^{t \, Cos. \, 2rx} \; Cos. \{(s+2)rx +$ $+ \, t \, Sin. \, 2rx\}. \; Cot. \, 2rx \, \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \, [-e^t + Cot. \, 2mr. \; Cos.^s mr. \; e^{t \, Cos. \, 2mr} \; Sin. \{(s+2)mr +$ $+ \, t \, Sin. \, 2mr\}] \; \ldots \; (1040), \; \int_0^\infty Cos.^s rx. \; e^{t \, Cos. \, 2rx} \; Sin. \{(s+2)rx + t \, Sin. \, 2rx\}. \; Cot. \, 2rx \, \frac{dx}{m^2 - x^2} =$ $= \frac{\pi}{2m} \, Cot. \, 2mr. \; [e^t - Cos.^s mr. \; e^{t \, Cos. \, 2mr} \; Cos. \{(s+2)mr + t \, Sin. \, 2mr\}] \; \ldots \; (1041),$ $\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx. \; e^{t \, Cos. \, 2rx} \; Cos. \{(s+2)rx + t \, Sin. \, 2rx\}. \; Cosec. \, rx \, \frac{xdx}{m^2 - x^2} =$

$\int_0^\infty \frac{Cos.^{s-1} rx. \; Sin. \{(s+1)rx\}}{1 - 2u Cos. \, 2rx + u^2} \, \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^s (1-u)^s} \, \{2^{s-1} - u(1+u)^{s-1}\} \; \ldots\ldots\ldots \; (1029),$

$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx. \; Cos. \{(s+1)rx\}. \; Tang. \, 2rx \, \frac{xdx}{m^2 + x^2} = -\frac{\pi e^{-4mr}}{1 + e^{-4mr}} - \frac{\pi}{2^s} \, \frac{1 - e^{-2mr}}{e^{2mr} + e^{-2mr}} (1 + e^{-2mr})^s \; . \; (1030),$

$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx. \; Sin. \{(s+1)rx\}. \; Tang. 2rx \, \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2^s m} \, \frac{1 - e^{-4mr}}{1 + e^{-4mr}} \, \{(1 + e^{-2mr})^{s-1} e^{-2mr} - 2^s\} \; . \; (1031),$

$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx. \; Cos. \{(s+1)rx\}. \; Cot. \, 2rx \, \frac{xdx}{m^2 + x^2} = -\frac{\pi e^{-4mr}}{1 - e^{-4mr}} - \frac{\pi}{2^s} \, \frac{1 + e^{-4mr}}{1 - e^{2mr}} (1 + e^{-2mr})^{s-2} \; . \; (1032),$

$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx. \; Sin. \{(s+1)rx\}. \; Cot. 2rx \, \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2^s m} \, \frac{1 + e^{-4mr}}{1 - e^{-4mr}} \, \{2^{s-1} - (1 + e^{-2mr})^{s-1} e^{-2mr}\} \; . \; (1033),$

$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx. \; Cos. \{(s+1)rx\}. \; Cosec. rx \, \frac{xdx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2^{s-2}(e^{2mr} - e^{-2mr})} \, \{2^{s-1} - (1 + e^{-2mr})^{s-1} e^{-2mr}\} \; . \; (1034),$

$\int_0^\infty Cos.^{s-2} rx. \; Sin. \{(s+1)rx\}. \; Cosec. rx \, \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2^{s-2} m (e^{2mr} - e^{-2mr})} \, \{2^{s-1} - (1 + e^{-2mr})^{s-1} e^{-2mr}\} \; . \; (1035),$

$\int_0^\infty \frac{Cos.^{s-1} rx. \; Cos. \{(s+1)rx\}}{1 - 2u Cos. \, 2rx + u^2} \, \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2^s m (1 - u e^{-2mr}) (1 - u e^{2mr})} \, \{(1 + e^{-2mr})^{s-1} e^{-2mr} -$ $- \frac{2u^2}{1-u} \, (e^{2mr} - e^{-2mr}) \, (1+u)^{s-2}\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1036),$

$\int_0^\infty \frac{Cos.^{s-1} rx. \; Sin. \{(s+1)rx\}}{1 - 2u Cos. \, 2rx + u^2} \, \frac{xdx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2^s \, (1 - u e^{-2mr}) \, (1 - u e^{2mr})} \, \{(1 + e^{-2mr})^{s-1} e^{-2mr} -$ $- \, u(1+u)^{s-1}\} \; \ldots\ldots \; (1037).$

$$= \frac{\pi}{2} \; Cosec.\, mr.\; Cos.^{s-1} mr.\; e^{t\, Cos.\, 2mr}\; Sin.\left\{(s+2)mr + t\, Sin.\, 2mr\right\} \;\ldots\ldots\; (1042),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\; e^{t\, Cos.\, 2rx}\; Sin.\left\{(s+2)rx + t\, Sin.\, 2rx\right\}.\; Cosec.\, rx\, \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{m}\; Cosec.\, 2mr.$$
$$\left[e^t - Cos.^s mr.\; e^{t\, Cos.\, 2mr}\; Cos.\left\{(s+2)mr + t\, Sin.\, 2mr\right\}\right] \;\ldots\; (1043),\; \int_0^\infty Cos.^s rx.\; e^{t\, Cos.\, 2rx}$$
$$\frac{Cos.\left\{(s+2)rx + t\, Sin.\, 2rx\right\}}{1-2u\, Cos.\, 2rx + u^2}\; \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2^{s-1} m(1-2u\, Cos.\, 2mr + u^2)} \left[\frac{u^2}{1-u} Sin.\, 2mr.\, (1+u)^{s-1} e^{tu} + \right.$$
$$\left. + 2^{s-2}\; Cos.^s mr.\; e^{t\, Cos.\, 2mr}\; Sin.\left\{(s+2)mr + t\, Sin.\, 2mr\right\}\right] \;\ldots\; (1044),\; \int_0^\infty Cos.^s rx.\; e^{t\, Cos.\, 2rx}$$
$$\frac{Sin.\left\{(s+2)rx + t\, Sin.\, 2rx\right\}}{1-2u\, Cos.\, 2rx + u^2}\; \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2^{s+1}(1-2u\, Cos.\, 2mr + u^2)} \left[(1+u)^s\, u\, e^{tu} - \right.$$
$$\left. - 2^s\; Cos.^s mr.\; e^{t\, Cos.\, 2mr}\; Cos.\left\{(s+2)mr + t\, Sin.\, 2mr\right\}\right] \;\ldots\ldots\ldots\; (1045),\; [104]$$

---

[104] Lorsque on fait évanouir d'abord la constante t dans ces intégrales et qu'ensuite on y change s en $s-1$, elles obtiendront la forme:

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\; Cos.\left\{(s+1)rx\right\}.\; Tang.\, 2rx\; \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\; \left[1 + Tang.\, 2mr.\right.$$
$$\left. Cos.^{s-1} mr.\; Sin.\left\{(s+1)mr\right\}\right] \;\ldots\; (1046),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\; Sin.\left\{(s+1)rx\right\}.\; Tang.\, 2rx\; \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\; Tang.\, 2mr.$$
$$\left[1 - Cos.^{s-1} mr.\; Cos.\left\{(s+1)mr\right\}\right] \;\ldots\; (1047),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\; Cos.\left\{(s+1)rx\right\}.\; Cot.\, 2rx\; \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\; \left[-1 + Cot.\, 2mr.\right.$$
$$\left. Cos.^{s-1} mr.\; Sin.\left\{(s+1)mr\right\}\right] \;\ldots\; (1048),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\; Sin.\left\{(s+1)rx\right\}.\; Cot.\, 2rx\; \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\; Cot.\, 2mr.$$
$$\left[1 - Cos.^{s-1} mr.\; Cos.\left\{(s+1)mr\right\}\right] \;\ldots\; (1049),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-2} rx.\; Cos.\left\{(s+1)rx\right\}.\; Cosec.\, rx\; \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\; Cosec.\, mr.$$
$$Cos.^{s-2} mr.\; Sin.\left\{(s+1)mr\right\} \;\ldots\; (1050),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{s-2} rx.\; Sin.\left\{(s+1)rx\right\}.\; Cosec.\, rx\; \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{m}\; Cosec.\, 2mr.$$
$$\left[1 - Cos.^{s-1} mr.\; Cos.\left\{(s+1)mr\right\}\right] \;\ldots\; (1051),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{s-1} rx.\; Cos.\left\{(s+1)rx\right\}}{1-2u\, Cos.\, 2rx + u^2}\; \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2^{s-2} m(1-2u\, Cos.\, 2mr + u^2)} \left[\frac{u^2}{1-u}\, (1+u)^{s-2}\, Sin.\, 2mr + \right.$$
$$\left. + 2^{s-3}\; Cos.^{s-1} mr.\; Sin.\left\{(s+1)mr\right\}\right] \;\ldots\; (1052),$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{s-1} rx.\; Sin.\left\{(s+1)rx\right\}}{1-2u\, Cos.\, 2rx + u^2}\; \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2^s(1-2u\, Cos.\, 2mr + u^2)} \left[(1+u)^{s-1}\, u - \right.$$
$$\left. - 2^s\; Cos.^{s-1} mr.\; Cos.\left\{(s+1)mr\right\}\right] \;\ldots\; (1053).$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ \frac{Sin.\left\{\frac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{dx}{x}=\frac{-\pi u}{2^{q+s+1}}\ (1+u)^q\ (1-u)^{s-2}\ e^{tu}\ \ldots\ (1054),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.\left\{\frac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Tang.\,2rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=-\frac{\pi}{2^{q+s+1}}\ \frac{1}{e^{2mr}+e^{-2mr}}\ (1+e^{-2mr})^{q+1}\ (1-e^{-2mr})^{s+1}\ e^{te^{-2mr}}\ \ldots\ldots\ldots\ (1055),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.\left\{\frac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Tang.\,2rx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+s+1}m}\ \frac{1}{e^{2mr}+e^{-2mr}}\ (1+e^{-2mr})^{q+1}\ (1-e^{-2mr})^{s+1}\ e^{te^{-2mr}}\ \ldots\ (1056),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.\left\{\frac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Cot.\,2rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+s+1}}\ (1+e^{-4mr})\ (1+e^{-2mr})^{q-1}\ (1-e^{-2mr})^{s-1}\ e^{te^{-2mr}-2mr}\ \ldots\ldots\ (1057),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.\left\{\frac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Cot.\,2rx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{-\pi}{2^{q+s+1}m}\ (1+e^{-4mr})\ (1+e^{-2mr})^{q-1}\ (1-e^{-2mr})^{s-1}\ e^{te^{-2mr}-2mr}\ \ldots\ldots\ (1058),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.\left\{\frac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi e^{-4mr}}{2^{q+s-1}}\ (1+e^{-2mr})^{q-1}\ (1-e^{-2mr})^{s-1}\ e^{te^{-2mr}}\ \ldots\ldots\ (1059),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.\left\{\frac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{-\pi e^{-4mr}}{2^{q+s-1}m}\ (1+e^{-2mr})^{q-1}\ (1-e^{-2mr})^{s-1}\ e^{te^{-2mr}}\ \ldots\ldots\ (1060),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ \frac{Cos.\left\{\frac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+s+1}m\,(1-ue^{-2mr})\,(1-ue^{2mr})}\ \left\{(1+e^{-2mr})^q\ (1-e^{-2mr})^s\ e^{te^{-2mr}-2mr}-u^s(1+u)^{q-1}\ (1-u)^{s-1}\ e^{tu}\ (e^{2mr}-e^{-2mr})\right\}\ \ldots\ (1061),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ \frac{Sin.\left\{\frac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^{q+s+1}(1-ue^{-2mr})\,(1-ue^{2mr})}\ \left\{(1+e^{-2mr})^q\ (1-e^{-2mr})^s\ e^{te^{-2mr}-2mr}-u(1+u)^q\ (1-u)^s\ e^{tu}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1062),\ [105]$$

[105] Ces intégrales contenant les trois constantes q, s, t, nous devons commencer par annuler le t, afin d'obtenir des formules exemptes d'exponentielles. Ainsi nous trouverons en écrivant $q-1$ et $s-1$ au lieu de q et s respectivement:



$$\int_0^\infty Cos.^q rx.\, Sin.^s rx.\, e^{t\,Cos.2rx}\, Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.2rx\right\}.\, Tang.2rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}\,Tang.2mr.$$

$$Cos.^q mr.\quad Sin.^s mr.\quad e^{t\,Cos.2mr}\quad Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mr-t\,Sin.2mr\right\}\;\ldots\ldots\;(1081),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\; Sin.^{s-1}rx\;\frac{Sin.\left\{\frac{1}{2}(s-1)\pi-(q+s)rx\right\}}{1-2u\,Cos.2rx+u^2}\;\frac{dx}{x}=\frac{-\pi u}{2^{q+s-2}}\,(1+u)^{q-1}\,(1-u)^{s-3}\;\ldots\;(1063),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\quad Sin.^{s-1}rx.\quad Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{4}\pi-(q+s)rx\right\}.\quad Tang.\,2rx\quad\frac{xdx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{q+s-1}}\quad\frac{1}{e^{2mr}+e^{-2mr}}\quad(1+e^{-2mr})^q\,(1-e^{-2mr})^s\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1064),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\quad Sin.^{s-1}rx.\quad Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{4}\pi-(q+s)rx\right\}.\quad Tang.\,2rx\quad\frac{dx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{q+s-1}m}\quad\frac{1}{e^{2mr}+e^{-2mr}}\quad(1+e^{-2mr})^q\quad(1-e^{-2mr})^s\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1065),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\quad Sin.^{s-1}rx.\quad Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{4}\pi-(q+s)rx\right\}.\quad Cot.\,2rx\quad\frac{xdx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{q+s-1}}\quad(1+e^{-4mr})\quad(1+e^{-2mr})^{q-2}\quad(1-e^{-2mr})^{s-2}\quad e^{-2mr}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1066),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\quad Sin.^{s-1}rx.\quad Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{4}\pi-(q+s)rx\right\}.\quad Cot.\,2rx\quad\frac{dx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{-\pi}{2^{q+s-1}m}\quad(1+e^{-4mr})\quad(1+e^{-2mr})^{q-2}\quad(1-e^{-2mr})^{s-2}\quad e^{-2mr}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1067),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-2}rx.\;\; Sin.^{s-2}rx.\;\; Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{4}\pi-(q+s)rx\right\}\;\;\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi e^{-4mr}}{2^{q+s-3}}\;(1+e^{-2mr})^{q-2}$$

$$(1-e^{-2mr})^{s-2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1068),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-2}rx.\;\; Sin.^{s-2}rx.\;\; Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{4}\pi-(q+s)rx\right\}\;\;\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{-\pi e^{-4mr}}{2^{q+s-3}m}\;(1+e^{-2mr})^{q-2}$$

$$(1-e^{-2mr})^{s-2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1069),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\qquad Sin.^{s-1}rx\qquad\frac{Cos.\left\{(s-1)\frac{1}{4}\pi-(q+s)rx\right\}}{1-2u\,Cos.2rx+u^2}\qquad\frac{dx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi e^{-2mr}}{2^{q+s-1}m\,(1-u\,e^{-2mr})\,(1-u\,e^{2mr})}\quad\left\{(1+e^{-2mr})^{q-1}\,(1-e^{-2mr})^{s-1}+u^2\,(1+u)^{q-2}\right.$$

$$\left.(1-u)^{s-2}\,(1-e^{4mr})\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1070),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\qquad Sin.^{s-1}rx\qquad\frac{Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{4}\pi-(q+s)rx\right\}}{1-2u\,Cos.2rx+u^2}\qquad\frac{xdx}{m^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{q+s-1}\,(1-u\,e^{-2mr})\,(1-u\,e^{2mr})}\quad\left\{(1+e^{-2mr})^{q-1}\quad(1-e^{-2mr})^{s-1}\quad e^{-2mr}\;-\right.$$

$$\left.-\;u\,(1+u)^{q-1}\quad(1-u)^{s-1}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\;(1071).$$

Nous en déduisons de nouveau en prenant l'unité pour q, — ce qui revient à faire évanouir le facteur *Cos. rx* dans les intégrales du texte:

$$\int_0^{\infty} Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Tang.\,2rx\ \frac{dx}{m^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2m}\ Tang.\,2mr.\ Cos.^q mr.\ Sin.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mr-t\,Sin.\,2mr\right\}\ldots(1082),$$

$$\int_0^{\infty} Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Cot.\,2rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ Cot.\,2mr.\ Cos.^q mr.\ Sin.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mr-t\,Sin.\,2mr\right\}\ldots(1083),$$

$$\int_0^{\infty} Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Cot.\,2rx\ \frac{dx}{m^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2m}\ Cot.\,2mr.\ Cos.^q mr.\ Sin.^s mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mr-t\,Sin.\,2mr\right\}\ldots(1084),$$

$$\int_0^{\infty} Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}\ \frac{xdx}{m^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ Cos.^{q-1} mr.\ Sin.^{s-1} mr.\ e^{t\,Cos.\,2mr}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mr-t\,Sin.\,2mr\right\}\ \ldots\ (1085),$$

$$\int_0^{\infty} Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}\ \frac{dx}{m^2-x^2}=$$

$$\int_0^{\infty} Sin.^{s-1} rx\ \frac{Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\right\}}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{dx}{x}=\frac{-\pi u}{2^{s-1}}\ (1-u)^{s-3}\ \ldots\ldots\ldots\ (1072),$$

$$\int_0^{\infty} Sin.^{s-1} rx.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\right\}.\ Tang.\,2rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=-\frac{\pi}{2^s}\ \frac{1+e^{-2mr}}{e^{2mr}+e^{-2mr}}(1-e^{-2mr})^s\ \ldots\ (1073),$$

$$\int_0^{\infty} Sin.^{s-1} rx.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\right\}.\ Tang.\,2rx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^s m}\ \frac{1+e^{-2mr}}{e^{2mr}+e^{-2mr}}(1-e^{-2mr})^s\ \ldots\ (1074),$$

$$\int_0^{\infty} Sin.^{s-1} rx.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\right\}.\ Cot.\,2rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^s}\ \frac{1+e^{-4mr}}{1+e^{-2mr}}(1-e^{-2mr})^{s-2}\,e^{-2mr}\ \ldots\ (1075),$$

$$\int_0^{\infty} Sin.^{s-1} rx.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\right\}.\ Cot.\,2rx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^s m}\ \frac{1+e^{-4mr}}{1+e^{-2mr}}(1-e^{-2mr})^{s-2}\,e^{-2mr}\ \ldots\ (1076),$$

$$\int_0^{\infty} Sin.^{s-2} rx.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\right\}.\ Sec.\,rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi\,e^{-4mr}}{2^{s-2}}\ \frac{(1-e^{-2mr})^{s-2}}{1+e^{-2mr}}\ \ldots\ (1077),$$

$$\int_0^{\infty} Sin.^{s-2} rx.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\right\}.\ Sec.\,rx\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi\,e^{-4mr}}{2^{s-2}m}\ \frac{(1-e^{-2mr})^{s-2}}{1+e^{-2mr}}\ \ldots\ (1078),$$

$$\int_0^{\infty} Sin.^{s-1} rx\ \frac{Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\right\}}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi\,e^{-2mr}}{2^s m(1-u\,e^{-2mr})(1-u\,e^{2mr})}\ \left\{(1-e^{-2mr})^{s-1}+\right.$$

$$\left.+\ \frac{u^2}{1+u}\ (1-u)^{s-1}\ (1-e^{4mr})\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1079),$$

$$\int_0^{\infty} Sin.^{s-1} rx\ \frac{Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\right\}}{1-2u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2^s(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})}\ \left\{(1-e^{-2mr})^{s-1}e^{-2mr}-\right.$$

$$\left.-\ u(1-u)^{s-1}\right\}\ \ldots\ldots\ (1080).$$

$$= \frac{\pi}{2m} \, Cos.^{q-1} mr. \; Sin.^{s-1} mr. \; e^{t Cos. 2mr} \; Cos. \left\{ \tfrac{1}{2} s\pi - (q+s+2)mr - t \, Sin. \, 2mr \right\} \; \ldots \; (1086),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx. \;\; Sin.^s rx. \;\; e^{t Cos. 2rx} \; \frac{Cos. \left\{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s+2)rx - t \, Sin. \, 2rx \right\}}{1 - 2u \, Cos. 2rx + u^2} \; \frac{dx}{m^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2m(1 - 2u \, Cos. 2mr + u^2)} \; [2^{-q-s+1} \; (1+u)^{q-1} \; (1-u)^{s-1} \; u^2 \; e^{tu} \; Sin. \, 2mr \; +$$

$$+ \; Cos.^q mr. \;\; Sin.^s mr. \;\; e^{t Cos. 2mr} \; Sin. \left\{ \tfrac{1}{2} s\pi - (q+s+2)mr - t \, Sin. \, 2mr \right\}] \; \ldots\ldots \; (1087),$$

$$\int_0^\infty Cos.^q rx. \;\; Sin.^s rx. \;\; e^{t Cos. 2rx} \; \frac{Sin. \left\{ \frac{1}{2} s\pi - (q+s+2)rx - t \, Sin. \, 2rx \right\}}{1 - 2u \, Cos. 2rx + u^2} \; \frac{xdx}{m^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2(1 - 2u \, Cos. 2mr + u^2)} \; [Cos.^q mr. \;\; Sin.^s mr. \;\; e^{t Cos. 2mr} \; Cos. \left\{ \tfrac{1}{2} s\pi - (q+s+2)mr - \right.$$

$$\left. - \; t \, Sin. \, 2mr \right\} - 2^{-q-s} \, u(1+u)^q \; (1-u)^s \; e^{tu}] \; \ldots \; (1088) \; [106].$$

---

[106] Appliquons à ces intégrales le même procédé de la note précédente, c'est-à-dire faisons d'abord évanouir la constante t; nous aurons, en prenant $q-1$ et $s-1$ pour q et s:

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx. \; Sin.^{s-1} rx. \; Cos. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)rx \right\}. \; Tang. \, 2rx \; \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \; Tang. \, 2mr.$$

$$Cos.^{q-1} mr. \;\; Sin.^{s-1} mr. \;\; Sin. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)mr \right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1089),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx. \; Sin.^{s-1} rx. \; Sin. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)rx \right\}. \; Tang. \, 2rx \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \; Tang. \, 2mr.$$

$$Cos.^{q-1} mr. \;\; Sin.^{s-1} mr. \;\; Cos. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)mr \right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1090),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx. \; Sin.^{s-1} rx. \; Cos. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)rx \right\}. \; Cot. \, 2rx \; \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \; Cot. \, 2mr.$$

$$Cos.^{q-1} mr. \;\; Sin.^{s-1} mr. \;\; Sin. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)mr \right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1091),$$

$$\int^\infty Cos.^{q-1} rx. \; Sin.^{s-1} rx. \; Sin. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)rx \right\}. \; Cot. \, 2rx \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \; Cot. \, 2mr.$$

$$Cos.^{q-1} mr. \;\; Sin.^{s-1} mr. \;\; Cos. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)mr \right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1092),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-2} rx. \;\; Sin.^{s-2} rx. \;\; Cos. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)rx \right\} \; \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \; Cos.^{q-2} mr.$$

$$Sin.^{s-2} mr. \;\; Sin. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)mr \right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1093),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-2} rx. \;\; Sin.^{s-2} rx. \;\; Sin. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)rx \right\} \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m} \; Cos.^{q-2} mr.$$

$$Sin.^{s-2} mr. \;\; Cos. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)mr \right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1094),$$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx. \; Sin.^{s-1} rx \; \frac{Cos. \left\{ (s-1) \frac{1}{2} \pi - (q+s)rx \right\}}{1 - 2u Cos. 2rx + u^2} \; \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m(1 - 2u Cos. 2mr + u^2)} \; [2^{-q-s+3}$$

$$(1+u)^{q-2} \; (1-u)^{s-2} \; u \, Sin. \, 2mr + Cos.^{q-1} mr. \; Sin.^{s-1} mr. \; Sin. \left\{ (s-1) \tfrac{1}{2} \pi - (q+s)mr \right\}] \; \ldots \; (1095).$$

47. Retournons aux développements qui suivent, ceux du N°. 13; et commençons par les formules (af), (ag), alors nous avons $f(\alpha+\beta) = s$, $f(\alpha+\beta e^{-mr}) = \frac{1-e^{-smr}}{1-e^{-mr}}$, $f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr}) = \frac{[1-e^{-mr}Cos.mr-e^{-smr}Cos.smr+e^{-(s+1)mr}Cos.\{(s-1)mr\}] + i[e^{-mr}\,Sin.\,mr - e^{-smr}\,Sin.\,smr + e^{-(s+1)mr}\,Sin.\{(s-1)\,mr\}]}{1-2\,e^{-mr}\,Cos.\,mr + e^{-2mr}}$, $f(\alpha+\beta\,e^{mri}) =$

$$\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\ Sin.^{s-1}rx\ \frac{Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)rx\}}{1-2\,uCos.\,2rx+u^2}\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2(1-2\,u\,Cos.\,2mr+u^2)}\,[2^{-q-s+2}$$
$$u\,(1+u)^{q-1}\ (1-u)^{s-1}\ -\ Cos.^{q-1}mr.\ Sin.^{s-1}mr.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)mr\}]\ \ldots\ (1096).$$

Puis pour $q=1$ (ce qui revient encore à faire disparaître les facteurs $Cos.\,rx$ primitifs des intégrales dans le texte) nous en tirons les formules suivantes:

$$\int_0^\infty Sin.^{s-1}rx.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ Tang.\ 2mr.\ Sin.^{s-1}mr.$$
$$Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mr\}\ \ldots\ldots\ (1097),$$

$$\int_0^\infty Sin.^{s-1}rx.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Tang.\ 2mr.$$
$$Sin.^{s-1}mr.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mr\}\ \ldots\ldots\ (1098),$$

$$\int_0^\infty Sin.^{s-1}rx.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}.\ Cot.\ 2rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ Cot.\ 2mr.\ Sin.^{s-1}mr.$$
$$Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mr\}\ \ldots\ldots\ (1099),$$

$$\int_0^\infty Sin.^{s-1}rx.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}.\ Cot.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Cot.\ 2mr.\ Sin.^{s-1}mr.$$
$$Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mr\}\ \ldots\ldots\ (1100),$$

$$\int_0^\infty Sin.^{s-2}rx.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}.\ Sec.\ rx\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ Sin.^{s-2}mr.\ Sec.\ mr.$$
$$Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mr\}\ \ldots\ldots\ (1101),$$

$$\int_0^\infty Sin.^{s-2}rx.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}.\ Sec.\ rx\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\ Sin.^{s-2}mr.\ Sec.\ mr.$$
$$Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mr\}\ \ldots\ldots\ (1102),$$

$$\int_0^\infty Sin.^{s-1}rx\ \frac{Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}}{1-2\,u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m(1-2\,u\,Cos.\,2mr+u^2)}\ [2^{2-s}$$
$$\frac{u}{1+u}\ (1-u)^{s-2}\ Sin.\ 2mr\ +\ Sin.^{s-1}mr.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mr\}]\ \ldots\ldots\ (1103),$$

$$\int_0^\infty Sin.^{s-1}rx\ \frac{Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}}{1-2\,u\,Cos.\,2rx+u^2}\ \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2(1-2\,u\,Cos.\,2mr+u^2)}\ [2^{1-s}$$
$$u(1-u)^{s-1}\ -\ Sin.^{s-1}mr.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mr\}]\ \ldots\ (1104).$$

$= \frac{1}{2}\{1 - Cos.\, smr + Sin.\, smr.\, Cot.\, \tfrac{1}{2} mr\} + \frac{1}{2} i \{- Sin.\, smr + (1 - Cos.\, mr)\, Cot.\, \tfrac{1}{2} mr\}$, tandis que pour avoir $f(\alpha + \beta e^{-(1+i)mr})$ et $f(\alpha + \beta e^{-mri})$ on n'a qu'à changer le signe de i dans ces deux dernières formules; puis il est $f(\alpha + \beta u) = \frac{1 - u^s}{1 - u}$. Donc nous aurons, en doublant les r, par les théorèmes (LXXXVIII) à (XCV):

$\int_0^\infty [- Sin.\, 2srx + (1 - Cos.\, 2srx)\; Cot.\, rx] \frac{dx}{x(m^2 + x^2)} = \frac{\pi}{m^2}\left(s - \frac{1 - e^{-2smr}}{1 - e^{-2mr}}\right)$, $\int_0^\infty [- Sin.\, 2srx + (1 - Cos.\, 2srx)\, Cot.\, rx] \frac{dx}{x(4m^4 + x^4)} = \frac{\pi}{2m^4}\left[s - \frac{1 - e^{-2mr}\, Cos.\, 2mr - e^{-2smr}\, Cos.\, 2smr + e^{-(s+1)2mr}\, Cos.\{(s-1)\, 2mr\}}{1 - 2e^{-2mr}\, Cos.\, 2mr + e^{-4mr}}\right]$, $\int_0^\infty [- Sin.\, 2srx + (1 - Cos.\, 2srx)\; Cot.\, rx] \frac{dx}{x(m^2 - x^2)} = \frac{\pi}{m^2}[s - 1 + Cos.\, 2smr - Sin.\, 2smr.\; Cot.\, mr]$, $\int_0^\infty [- Sin.\, 2srx + (1 - Cos.\, 2srx)\; Cot.\, rx] \frac{dx}{x(m^4 - x^4)} = \frac{\pi}{2m^4}\left[2s - \frac{1 - e^{-2smr}}{1 - e^{-2mr}} - 1 + Cos.\, 2smr - Sin.\, 2smr.\; Cot.\, mr\right]$. Mais par l'intermédiaire des intégrales $(\gamma\nu)$, $(\gamma\theta)$, $(\gamma\iota)$, $(\gamma\kappa)$ des Notes [96] à [99], on peut simplifier nos résultats de la manière suivante, quand on introduit en outre la transformation connue de $1 - Cos.\, 2srx = 2\, Sin.^2 srx$:

$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\; Cot.\, rx \frac{dx}{x(m^2 + x^2)} = \frac{\pi}{4m^2}\left[2s - (1 - e^{-2smr}) \frac{1 + e^{-2mr}}{1 - e^{-2mr}}\right]$ ... (1105),

$\int_0^\infty Sin.^2 srx.\; Cot.\, rx \frac{dx}{x(4m^4 + x^4)} = \frac{\pi}{8m^4}\left[2s - \frac{1 - e^{-4mr} - e^{-2smr}\, Cos.\, 2smr + 2e^{-(s+1)2mr}\, Sin.\, 2smr.\; Sin.\, 2mr + e^{-(s+2)2mr}\, Cos.\, 2smr}{1 - 2e^{-2mr}\, Cos.\, 2mr + e^{-4mr}}\right]$ ... (1106), $\int_0^\infty Sin.^2 srx.\; Cot.\, rx \frac{dx}{x(m^2 - x^2)} = \frac{\pi}{4m^2}[2s - Sin.\, 2smr.\; Cot.\, mr]$ .... (1107), $\int_0^\infty Sin.^2 srx.\; Cot.\, rx \frac{dx}{x(m^4 - x^4)} = \frac{\pi}{8m^4}\left[4s - (1 - e^{-2smr}) \frac{1 + e^{-2mr}}{1 - e^{-2mr}} - Sin.\, 2smr.\; Cot.\, mr\right]$ ... (1108).

Ensuite on trouve par les théorèmes suivants:

$\int_0^\infty \frac{- Sin.\, 2srx + (1 - Cos.\, 2srx)\; Cot.\, rx}{1 - 2u\, Cos.\, 2rx + u^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{(1-u)^2}\left(s - \frac{1 - u^s}{1 - u}\right)$ ... (1109),

$\int_0^\infty [2s - 1 + Cos.\, 2srx - Sin.\, 2srx.\; Cot.\, rx]\; Tang.\, 2rx \frac{x\, dx}{m^2 + x^2} = 2\pi s \frac{e^{-4mr}}{1 + e^{-4mr}} + \pi \frac{1 + e^{-2mr}}{1 + e^{-4mr}}(1 - e^{-2smr})$ ... (1110), $\int_0^\infty [- Sin.\, 2srx + (1 - Cos.\, 2srx)\; Cot.\, rx]\; Tang.\, 2rx \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{m} \frac{1 - e^{-4mr}}{1 + e^{-4mr}}\left\{\frac{1 - e^{-2smr}}{1 - e^{-2mr}} - s\right\}$ ... (1111), $\int_0^\infty [2s - 1 + Cos.\, 2srx -$

$$- \mathit{Sin.}\, 2srx.\ \mathit{Cot.}\, rx]\ \mathit{Cot.}\, 2rx \frac{xdx}{m^2+x^2} = 2\pi s \frac{e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}} - \pi \frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}} \frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}} \ \dots\ (1112),$$

$$\int_0^\infty [-\mathit{Sin.}\, 2srx + (1-\mathit{Cos.}\, 2srx)\ \mathit{Cot.}\, rx]\ \mathit{Cot.}\, 2rx \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m} \frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}} \left\{ s - \frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}} \right\} .(1113),$$

$$\int_0^\infty [2s - 1 + \mathit{Cos.}\, 2srx - \mathit{Sin.}\, 2srx.\ \mathit{Cot.}\, rx]\ \mathit{Cosec.}\, 2rx \frac{xdx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{2\pi}{e^{2mr} - e^{-2mr}} \left(s - \frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}} \right) \ \dots\dots\dots\dots\ (1114),\ \int_0^\infty [-\mathit{Sin.}\, 2srx +$$

$$+ (1 - \mathit{Cos.}\, 2srx)\ \mathit{Cot.}\, rx]\ \mathit{Cosec.}\, 2rx \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{2\pi}{m(e^{2mr} - e^{-2mr})} \left(s - \frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}} \right) .(1115),$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - \mathit{Cos.}\, 2srx + \mathit{Sin.}\, 2srx.\ \mathit{Cot.}\, rx}{1 - 2u\, \mathit{Cos.}\, 2rx + u^2} \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m(1-ue^{-2mr})\ (1-ue^{2mr})} \left\{ \frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}} - \right.$$

$$\left. - \frac{u}{1+u} \frac{1-u^s}{(1-u)^2} (e^{2mr} - e^{-2mr}) \right\} \ \dots\ (1116),\ \int_0^\infty \frac{-\mathit{Sin.}\, 2srx + (1-\mathit{Cos.}\, 2srx)\ \mathit{Cot.}\, rx}{1 - 2u\, \mathit{Cos.}\, 2rx + u^2} \frac{xdx}{m^2+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{(1-ue^{-2mr})\ (1-ue^{2mr})} \left\{ \frac{1-e^{-2smr}}{1-e^{-2mr}} - \frac{1-u^s}{1-u} \right\} \ \dots\ (1117),\ \int_0^\infty [2s - 1 + \mathit{Cos.}\, 2srx -$$

$$- \mathit{Sin.}\, 2srx.\ \mathit{Cot.}\, rx]\ \mathit{Tang.}\, 2rx \frac{xdx}{m^2-x^2} = -\frac{\pi}{2} [2s + \mathit{Tang.}\, 2mr.\ \{ - \mathit{Sin.}\, 2smr +$$

$$+ (1 - \mathit{Cos.}\, 2smr)\ \mathit{Cot.}\, mr \}] \ \dots\ (1118),\ \int_0^\infty [-\mathit{Sin.}\, 2srx + (1 - \mathit{Cos.}\, 2srx)\ \mathit{Cot.}\, rx]$$

$$\mathit{Tang.}\, 2rx \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} \mathit{Tang.}\, 2mr.\ (2s - 1 + \mathit{Cos.}\, 2smr - \mathit{Sin.}\, 2smr.\ \mathit{Cot.}\, mr) \ \dots\ (1119),$$

$$\int_0^\infty [2s - 1 + \mathit{Cos.}\, 2srx - \mathit{Sin.}\, 2srx.\ \mathit{Cot.}\, rx]\ \mathit{Cot.}\, 2rx \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2} [2s - \mathit{Cot.}\, 2mr.$$

$$\{ - \mathit{Sin.}\, 2smr + (1 - \mathit{Cos.}\, 2smr)\ \mathit{Cot.}\, mr \}] \ \dots\ (1120),\ \int_0^\infty [-\mathit{Sin.}\, 2srx + (1 - \mathit{Cos.}\, 2srx)\ \mathit{Cot.}\, rx]$$

$$\mathit{Cot.}\, 2rx \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} \mathit{Cot.}\, 2mr.\ [2s - 1 + \mathit{Cos.}\, 2smr - \mathit{Sin.}\, 2smr.\ \mathit{Cot.}\, mr] \ \dots\ (1121),$$

$$\int_0^\infty [2s - 1 + \mathit{Cos.}\, 2srx - \mathit{Sin.}\, 2srx.\ \mathit{Cot.}\, rx]\ \mathit{Cosec.}\, 2rx \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2} \mathit{Cosec.}\, 2mr.$$

$$[\mathit{Sin.}\, 2smr - (1 - \mathit{Cos.}\, 2smr)\ \mathit{Cot.}\, mr] \ \dots\ (1122),\ \int_0^\infty [-\mathit{Sin.}\, 2srx + (1 - \mathit{Cos.}\, 2srx)\ \mathit{Cot.}\, rx]$$

$$\mathit{Cosec.}\, 2rx \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} \mathit{Cosec.}\, 2mr.\ [2s - 1 + \mathit{Cos.}\, 2smr - \mathit{Sin.}\, 2smr.\ \mathit{Cot.}\, mr] \ \dots\ (1123),$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - \mathit{Cos.}\, 2srx + \mathit{Sin.}\, 2srx.\ \mathit{Cot.}\, rx}{1 - 2u\, \mathit{Cos.}\, 2rx + u^2} \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m(1 - 2u\, \mathit{Cos.}\, 2mr + u^2)} \left[\frac{4u}{1+u} \frac{1-u^s}{(1-u)^2} \mathit{Sin.}\, 2mr + \right.$$

$$\left. + \mathit{Sin.}\, 2smr - (1 - \mathit{Cos.}\, 2smr)\ \mathit{Cot.}\, mr \right] \ \dots\ (1124),\ \int_0^\infty \frac{\mathit{Sin.}\, 2srx - (1 - \mathit{Cos.}\, 2srx)\ \mathit{Cot.}\, rx}{1 - 2u\, \mathit{Cos.}\, 2rx + u^2} \frac{xdx}{m^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2(1-2u\,\mathrm{Cos.}\,2mr+u^2)}\left\{1-\mathrm{Cos.}\,2smr+\mathrm{Sin.}\,2smr.\ \mathrm{Cot.}\,mr-2\frac{1-u^s}{1-u}\right\} \ldots\ldots\ldots (1125).$$

Pour les équations (ah) et (ai) on a $f(\alpha+\beta)=1$, $f(\alpha+\beta e^{-mr})=\frac{1+e^{-(2s+1)mr}}{1+e^{-mr}}$,

$$f(\alpha+\beta e^{-(1-i)mr}) = \frac{[1+e^{-mr}\,\mathrm{Cos.}\,mr+e^{-(2s+1)mr}\,\mathrm{Cos.}\{(2s+1)mr\}+e^{-(s+1)2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2smr]+i[-e^{-mr}\,\mathrm{Sin.}\,mr+e^{-(2s+1)mr}\,\mathrm{Sin.}\{(2s+1)mr\}+e^{-(s+1)2mr}\,\mathrm{Sin.}\,2smr]}{1+2e^{-mr}\,\mathrm{Cos.}\,mr+e^{-2mr}},$$

$$f(\alpha+\beta e^{mri}) = \frac{1}{2}\{1+\mathrm{Cos.}\,2smr-\mathrm{Sin.}\,2smr.\ \mathrm{Tang.}\,\tfrac{1}{2}mr\}+\frac{1}{2}i\{\mathrm{Sin.}\,2smr-(1-\mathrm{Cos.}\,2smr)\,\mathrm{Tang.}\,\tfrac{1}{2}mr\},$$

où, pour avoir $f(\alpha+\beta e^{-(1+i)mr})$ et $f(\alpha+\beta e^{-mri})$, il faut seulement changer le signe de i dans les deux dernières fonctions: encore a-t-on $f(\alpha+\beta u)=\frac{1+u^{2s+1}}{1+u}$. Maintenant doublons r pour éviter les fractions, et les théorèmes (LXXXVIII) à (XCV) nous donneront:

$$\int_0^\infty [\mathrm{Sin.}\,4srx-(1-\mathrm{Cos.}\,4srx)\,\mathrm{Tang.}\,rx]\frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{m^2}\,\frac{e^{-2mr}-e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}},$$

$$\int_0^\infty [\mathrm{Sin.}\,4srx-(1-\mathrm{Cos.}\,4srx)\,\mathrm{Tang.}\,rx]\frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\,\frac{e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr+e^{-4mr}-e^{-(2s+1)2mr}\,\mathrm{Cos.}\{(2s+1)2mr\}-e^{-(s+1)4mr}\,\mathrm{Cos.}\,4smr}{1+2e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr+e^{-4mr}},$$

$$\int_0^\infty [\mathrm{Sin.}\,4srx-(1-\mathrm{Cos.}\,4srx)\,\mathrm{Tang.}\,rx]\frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}[2-(1+\mathrm{Cos.}\,4smr-\mathrm{Sin.}\,4smr.\ \mathrm{Tang.}\,mr)],$$

$$\int_0^\infty [\mathrm{Sin.}\,4srx-(1-\mathrm{Cos.}\,4srx)\,\mathrm{Tang.}\,rx]\frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\left[4-2\frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}}-(1+\mathrm{Cos.}\,4smr-\mathrm{Sin.}\,4smr.\ \mathrm{Tang.}\,mr)\right].$$

Or, ces intégrales se prêtent de nouveau à une simplification importante, lorsque nous y employons les mêmes intégrales ($\gamma\varepsilon$), ($\gamma\theta$), ($\gamma\iota$), ($\gamma\kappa$) de plus haut, et qu'on écrit en outre $2\,\mathrm{Sin.}^2 2srx$ au lieu de $1-\mathrm{Cos.}\,2srx$. Dès-lors on trouve enfin:

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^2 2srx.\ \mathrm{Tang.}\,rx\frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{4m^2}(1-e^{-4smr})\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}} \ldots\ldots\ldots (1126),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^2 2srx.\ \mathrm{Tang.}\,rx\frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{8m^4}\,\frac{1-e^{-4mr}-e^{-4smr}\,\mathrm{Cos.}\,4smr-2e^{-(2s+1)2mr}\,\mathrm{Sin.}\,4smr.\ \mathrm{Sin.}\,2mr+e^{-(s+1)4mr}\,\mathrm{Cos.}\,4smr}{1+2e^{-2mr}\,\mathrm{Cos.}\,2mr+e^{-4mr}} \ldots\ldots\ldots (1127),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^2 2srx.\ \mathrm{Tang.}\,rx\frac{dx}{x(m^2-x^2)} = -\frac{\pi}{4m^2}\,\mathrm{Sin.}\,4smr.\ \mathrm{Tang.}\,mr \ldots\ldots\ldots (1128),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^2 2srx.\ \mathrm{Tang.}\,rx\frac{dx}{x(m^4-x^4)} =$$

$$= -\frac{\pi}{8m^4}\left[(1-e^{-4smr})\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}} - \mathit{Sin.}\,4smr.\ \mathit{Tang.}\,mr\right] \ldots\ldots (1129)$$ [107].

Puis on a par les autres théorèmes: $\int_0^\infty \frac{\mathit{Sin.}\,4srx - (1-\mathit{Cos.}\,4srx)\ \mathit{Tang.}\,rx}{1-2u\,\mathit{Cos.}\,2rx+u^2}\frac{dx}{x} =$

$= \frac{\pi}{2(1-u)^2}\left\{1-\frac{1+u^{2s+1}}{1+u}\right\} \ldots\ldots (1134)$, $\int_0^\infty [1-\mathit{Cos.}\,4srx + \mathit{Sin.}\,4srx.\ \mathit{Tang.}\,rx]$

$\mathit{Tang.}\,2rx\ \frac{xdx}{m^2+x^2} = 2\pi\frac{e^{-4mr}}{1+e^{-4mr}} + \pi\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-4mr}}(1+e^{-(2s+1)2mr}) \ldots. (1135)$,

$\int_0^\infty [\mathit{Sin.}4srx-(1-\mathit{Cos.}4srx)\ \mathit{Tang.}rx]\ \mathit{Tang.}2rx\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m}\frac{1-e^{-4mr}}{1+e^{-4mr}}\left(\frac{e^{-(2s+1)2mr}-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\right). (1136)$,

$\int_0^\infty [1-\mathit{Cos.}\,4srx + \mathit{Sin.}\,4srx.\ \mathit{Tang.}\,rx]\ \mathit{Cot.}\,2rx\frac{xdx}{m^2+x^2} = 2\pi\frac{e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}}$.—

$-\pi\frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}}\frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}} \ldots (1137)$, $\int_0^\infty [\mathit{Sin.}\,4srx - (1-\mathit{Cos.}\,4srx)\ \mathit{Tang.}\,rx]$

$\mathit{Cot.}\,2rx\ \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m}\frac{1+e^{-4mr}}{1-e^{-4mr}}\frac{e^{-2mr}-e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}} \ldots (1138)$, $\int_0^\infty [1-\mathit{Cos.}\,4srx +$

$+\mathit{Sin.}4srx.\ \mathit{Tang.}rx]\ \mathit{Cosec.}2rx\frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{2\pi}{e^{2mr}-e^{-2mr}}\frac{e^{-2mr}-e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}} \ldots\ldots (1139)$,

$\int_0^\infty [\mathit{Sin.}4srx-(1-\mathit{Cos.}4srx)\mathit{Tang.}rx]\ \mathit{Cosec.}2rx\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{2\pi}{m(e^{2mr}-e^{-2mr})}\frac{e^{-2mr}-e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}}. (1140)$,

$\int_0^\infty \frac{1+\mathit{Cos.}4srx - \mathit{Sin.}4srx.\ \mathit{Tang.}rx}{1-2u\,\mathit{Cos.}\,2rx+u^2}\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})}\left\{\frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}} -\right.$

$\left.-\frac{u}{1-u}(e^{2mr}-e^{-2mr})\frac{1+u^{2s+1}}{(1+u)^2}\right\} \ldots (1141)$, $\int_0^\infty \frac{\mathit{Sin.}4srx-(1-\mathit{Cos.}4srx)\ \mathit{Tang.}rx}{1-2u\,\mathit{Cos.}\,2rx+u^2}\frac{xdx}{m^2+x^2} =$

$= \frac{\pi}{(1-ue^{-2mr})(1-ue^{2mr})}\left\{\frac{1+e^{-(2s+1)2mr}}{1+e^{-2mr}} - \frac{1+u^{2s+1}}{1+u}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1142)$,

---

[107] Après avoir mis $2s$ au lieu de s dans les intégrales (1105) à (1108) on peut les ajouter aux intégrales du texte, et l'on trouvera, quand on change $2r$ en r:

$$\int_0^\infty \mathit{Sin.}^2 srx.\ \mathit{Cosec.}\,rx\ \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\left[s+\frac{1-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1130).$$

$$\int_0^\infty \mathit{Sin.}^2 srx.\ \mathit{Cosec.}rx\ \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\left[s - \frac{(1-e^{-2mr})e^{-mr}\mathit{Cos.}\,mr - e^{-(2s+1)mr}\mathit{Cos.}\{(2s+1)mr\} + e^{-(2s+3)mr}\mathit{Cos.}\{(2s-1)mr\}}{1-2e^{-2mr}\mathit{Cos.}\,2mr + e^{-4mr}}\right] \ldots\ldots (1131).$$

$$\int_0^\infty \mathit{Sin.}^2 srx.\ \mathit{Cosec.}\,rx\ \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{4m^2}\left\{2s - \mathit{Sin.}\,2smr.\ \mathit{Cosec.}\,mr\right\} \ldots\ldots (1132).$$

$$\int_0^\infty \mathit{Sin.}^2 srx.\ \mathit{Cosec.}rx\ \frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{8m^4}\left[4s+2\frac{1-e^{-2smr}}{e^{mr}-e^{-mr}} - \mathit{Sin.}\,2smr.\ \mathit{Cosec.}\,mr\right] \ldots (1133).$$

$$\int_0^\infty [1 - Cos.\ 4srx + Sin.\ 4srx.\ Tang.\ rx]\ Tang.\ 2rx\ \frac{xdx}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2}\ [2 + Tang.\ 2mr.$$
$$\{Sin.\ 4smr - (1 - Cos.\ 4smr)\ Tang.\ mr\}] \ \dots\ (1143),\ \int_0^\infty [Sin.\ 4srx - (1 - Cos.\ 4srx)\ Tang.\ rx]$$
$$Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Tang.\ 2mr.\ (1 - Cos.\ 4smr + Sin.\ 4smr.\ Tang.\ mr)\ \dots\ (1144),$$
$$\int_0^\infty [1 - Cos.4srx + Sin.4srx.\ Tang.rx]\ Cot.\ 2rx\ \frac{xdx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2}\ [2 - Cot.2mr.\ \{Sin.4smr -$$
$$- (1 - Cos.\ 4smr)\ Tang.\ mr\}] \ \dots\ (1145),\ \int_0^\infty [Sin.\ 4srx - (1 - Cos.\ 4srx)\ Tang.\ rx]$$
$$Cot.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Cot.\ 2mr.\ (1 - Cos.\ 4smr + Sin.\ 4smr.\ Tang.\ mr)\ \dots\ (1146),$$
$$\int_0^\infty [1 - Cos.\ 4srx + Sin.\ 4srx.\ Tang.\ rx]\ Cosec.\ 2rx\ \frac{xdx}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2}\ Cosec.\ 2mr.$$
$$\{Sin.\ 4smr - (1 - Cos.\ 4smr)\ Tang.\ mr\} \ \dots\ (1147),\ \int_0^\infty [Sin.\ 4srx - (1 - Cos.\ 4srx)\ Tang.\ rx]$$
$$Cosec.\ 2rx\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m}\ Cosec.\ 2mr.\ (1 - Cos.\ 4smr + Sin.\ 4smr.\ Tang.\ mr)\ \dots\ (1148),$$
$$\int_0^\infty \frac{1 + Cos.4srx - Sin.4srx.\ Tang.rx}{1 - 2u\,Cos.\,2rx + u^2}\ \frac{dx}{m^2 - x^2} = \frac{\pi}{2m(1 - 2u\,Cos.2mr + u^2)}\ \Big[\frac{4u}{1-u}\ \frac{1 + u^{2s+1}}{(1+u)^2}\ Sin.2mr +$$
$$+ Sin.4smr - (1 - Cos.4smr)\ Tang.mr\Big\} \ \dots\ (1149),\ \int_0^\infty \frac{Sin.4srx - (1 - Cos.4srx)\,Tang.rx}{1 - 2u\,Cos.\,2rx + u^2}\ \frac{xdx}{m^2 - x^2} =$$
$$= \frac{\pi}{2(1 - 2u\,Cos.\,2mr + u^2)}\ \Big\{2\,\frac{1 + u^{2s+1}}{1+u} - 1 - Cos.\ 4smr + Sin.\ 4smr.\ Tang.\ mr\Big\} \ \dots\ (1150).$$

Enfin pour les développements (ak) et (al) du même N°. on a $f(\alpha + \beta) =$

$$= \frac{1 - q^s}{1 - q},\ f(\alpha + \beta e^{-mr}) = \frac{1 - q^s e^{-smr}}{1 - q e^{-mr}},\ f(\alpha + \beta e^{-(1-i)mr}) =$$
$$= \frac{[1 - q e^{-mr}\ Cos.\ mr - q^s e^{-smr}\ Cos.\ smr + q^{s+1}\ e^{-(s+1)mr}\ Cos.\{(s-1)mr\}] + i\,[q e^{-mr}\ Sin.\ mr - q^s e^{-smr}\ Sin.\ smr + q^{s+1}\ e^{-(s+1)mr}\ Sin.\{(s-1)mr\}]}{1 - 2q e^{-mr}\ Cos.\ mr + q^2 e^{-2mr}},$$
$$f(\alpha + \beta e^{mri}) = \frac{[1 - q\ Cos.\ mr - q^s\ Cos.\ smr + q^{s+1}\ Cos.\{(s-1)mr\}] + i\,[q\ Sin.\ mr - q^s\ Sin.\ smr + q^{s+1}\ Sin.\{(s-1)mr\}]}{1 - 2q\ Cos.\ mr + q^2};$$

la valeur des fonctions analogues $f(\alpha + \beta e^{-(1+i)mr})$ et $f(\alpha + \beta e^{-mri})$ se tirera de ces dernières par le simple changement de i en $-i$: puis on a $f(\alpha + \beta u) = \frac{1 - q^s u^s}{1 - q u}$.

Par consequent les huit premiers théorèmes nous donnent:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.rx - q^{s-1} Sin.srx + q^s Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2qCos.rx+q^2} \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2qm^2} \left\{\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}}\right\} . (1151),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, rx - q^{s-1}\, Sin.\, srx + q^s\, Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2\,qCos.\, rx+q^2} \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{8qm^4} \left[\frac{1-q^s}{1-q} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-q\, e^{-mr}\, Cos.\, mr - q^s\, e^{-smr}\, Cos.\, smr + q^{s+1}\, e^{-(s+1)mr}\, Cos.\{(s-1)\, mr\}}{1-2\, q\, e^{-mr}\, Cos.\, mr + q^2\, e^{-2mr}}\right] \ldots (1152),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, rx - q^{s-1}\, Sin.\, srx + q^s\, Sin.\{(s-1)\, rx\}}{1-2\, q\, Cos.\, rx+q^2} \frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2\, q\, m^2} \left\{\frac{1-q^s}{1-q} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-q\, Cos.\, mr - q^s Cos.\, smr + q^{s+1}\, Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2\, q\, Cos.\, mr+q^2}\right\} \ldots (1153), \int_0^\infty \frac{Sin.\, rx - q^{s-1}\, Sin.\, srx +}{1-2\, qCos.\, rx +}$$

$$\frac{+ q^s Sin.\{(s-1)rx\}}{+q^2} \frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4qm^4} \left[2\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q^s e^{-smr}}{1-q e^{-mr}} - \frac{1-qCos.mr - q^s Cos.smr +}{1-2q\, Cos.\, mr +}\right.$$

$$\left.\frac{+q^{s+1}\, Cos.\{(s-1)mr\}}{+q^2}\right] \ldots (1154).$$ Or, nous avons $$\int_0^\infty \frac{Sin.\, rx}{1-2q\, Cos.rx+q^2} \frac{dx}{x(m^2+x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2m^2\,(1-q)} \frac{1-e^{-mr}}{1-q\, e^{-mr}} \ldots\ldots\ldots (\gamma\lambda), \int_0^\infty \frac{Sin.\, rx}{1-2\, q\, Cos.\, rx + q^2} \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} =$$

$$= \frac{\pi}{16m^4} \frac{1}{1-q} \frac{1-(1+q)\, e^{-mr}\, Cos.\, mr + q^2\, e^{-2mr}}{1-2\, q\, e^{-mr}\, Cos.\, mr + q^2\, e^{-2mr}} \ldots (\gamma\mu), \int_0^\infty \frac{Sin.\, rx}{1-2qCos.rx+q^2} \frac{dx}{x(m^2-x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2m^4} \left[\frac{1+q}{1-q} \frac{1-Cos.\, mr}{1-2\, q\, Cos.\, mr+q^2}\right] \ldots (\gamma\nu), \int_0^\infty \frac{Sin.\, rx}{1-2\, q\, Cos.\, rx+q^2} \frac{dx}{x(m^4-x^4)} =$$

$$= \frac{\pi}{4m^4} \left\{\frac{1}{1-q} \frac{1-e^{-mr}}{1-q\, e^{-mr}} + \frac{1+q}{1-q} \frac{1-Cos.\, mr}{1-2\, q\, Cos.\, mr+q^2}\right\} \ldots (\gamma\xi)$$ [108]. Par suite nous pouvons simplifier les intégrales trouvées:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, srx - q\, Sin.\{(s-1)\, rx\}}{1-2\, q\, Cos.\, rx+q^2} \frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2m^2} \left\{\frac{1}{1-q} - \frac{e^{-smr}}{1-q\, e^{-mr}}\right\} \ldots (1155),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\, srx - q\, Sin.\{(s-1)\, rx\}}{1-2\, q\, Cos.\, rx+q^2} \frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{8m^4} \left\{\frac{1}{1-q} - \frac{q^2\, e^{-2mr} + q^s e^{-smr}\, Cos.\, smr +}{(1-2\, q\, e^{-mr}\, Cos.\, mr +}\right.$$

$$\left.\frac{+\, q^{s+1}\, e^{-(s+1)mr}\, Cos.\{(s-1)mr\}}{+\, q^2\, e^{-2mr})\, q^s}\right\} \ldots (1156), \int_0^\infty \frac{Sin.\, srx - q\, Sin.\{(s-1)\, rx\}}{1-2\, q\, Cos.\, rx+q^2} \frac{dx}{x(m^2-x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2m^2} \left\{\frac{1}{1-q} - \frac{Cos.smr - qCos.\{(s-1)mr\}}{1-2\, qCos.\, mr+q^2}\right\} . (1157), \int_0^\infty \frac{Sin.srx - qSin.\{(s-1)rx\}}{1-2\, qCos.\, rx+q^2} \frac{dx}{x(m^4-x^4)} =$$

$$= \frac{\pi}{4m^4} \left\{\frac{2}{1-q} - \frac{e^{-smr}}{1-q\, e^{-mr}} - \frac{Cos.\, smr - q\, Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2\, q\, Cos.\, mr+q^2}\right\} \ldots (1158)$$ [109]. Ensuite

---

[108] On trouve ces intégrales lorsqu'on soustrait l'intégrale (r) des intégrales (αο), (απ), (βρ), (βω).

[109] Soit qu'on regarde ces intégrales comme des équations de condition, et qu'on y applique le



on a par les théorèmes suivants $\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,rx - q^s\,Sin.\,srx + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)rx\}}{(1-2q\,Cos.rx+q^2)\,(1-2u\,Cos.\,rx+u^2)} \frac{dx}{x} =$

$= \frac{\pi}{2(1-u)^2}\left\{\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q^s u^s}{1-qu}\right\} \dots (1163),$ $\int_0^\infty \frac{q(1+q)\,(1-Cos.\,rx) - q^s(1-Cos.\,srx) + q^{s+1}[2\,Cos.rx - Cos.srx - Cos.\{(s-1)rx\}] - q^{s+2}[1-Cos.\{(s-1)rx\}]}{1-2\,q\,Cos.rx + q^2}\, Tang.\,rx\, \frac{xdx}{m^2+x^2} =$

$= \pi\,\frac{e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,(1-q^s) + \frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\,(1-q)\,\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}} \dots (1164),$ $\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,rx - q^s Sin.srx + q^{s+1} Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\, Tang.rx\, \frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}\,\frac{1-e^{-2mr}}{1+e^{-2mr}}\left\{\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}} - \frac{1-q^s}{1-q}\right\}.(1165),$

$\int_0^\infty \frac{q(1+q)\,(1-Cos.\,rx) - q^s(1-Cos.\,srx) + q^{s+1}\,[2\,Cos.\,rx - Cos.\,srx - Cos.\{(s-1)\,rx\}] - q^{s+2}[1-Cos.\{(s-1)rx\}]}{1-2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\, Cot.rx\,\frac{xdx}{m^2+x^2} = \pi\,\frac{e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}(1-q^s) - \frac{\pi}{2}\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}(1-q)\,\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}}\,.(1166),$

$\int_0^\infty \frac{q\;Sin.\;rx\; - \;q^s\;Sin.\;srx\; + \;q^{s+1}\;Sin.\{(s-1)\,rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\;Cot.\;rx \cdot \frac{dx}{m^2+x^2} =$

$= \frac{\pi}{2m}\,\frac{1+e^{-2mr}}{1-e^{-2mr}}\left\{\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}}\right\} \dots (1167),$ $\int_0^\infty \frac{q\,(1+q)\,(1-Cos.\,rx) - q^s\,(1-Cos.\,srx) + q^{s+1}[2\,Cos.rx - Cos.srx - Cos.\{(s-1)rx\}] - q^{s+2}[1-Cos.\{(s-1)rx\}]}{1-2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\; Cosec.\;rx\;\frac{xdx}{m^2+x^2} =$

$= \frac{\pi}{e^{mr}-e^{-mr}}\left\{1-q^s - (1-q)\,\frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}}\right\} \dots (1168),$ $\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\;rx - q^s\,Sin.\;srx + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2\,q\,Cos.\,rx + q^2}\; Cosec.\;rx\;\frac{dx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{m(e^{mr}-e^{-mr})}\left\{\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q^s e^{-smr}}{1-qe^{-mr}}\right\} \dots (1169).$

---

raisonnement connu, — soit qu'on y fasse s égal successivement à 1, 2, 3, pour parvenir à des expressions générales; on obtiendra toujours les intégrales générales suivantes.

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\left\{\frac{1-q^s}{(1-q)^2} + \frac{q^s-e^{-smr}}{(1-q\,e^{-mr})\,(1-q\,e^{mr})}\right\} \dots (1159),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{x(4m^4+x^4)} = \frac{\pi}{8m^4}\left\{\frac{1-q^s}{(1-q)^2} + \frac{q^{s-1}-1}{1-q}\,\frac{e^{-mr}}{1-2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr+q^2\,e^{-2mr}} - \frac{(q^{s+1}\;e^{-mr}\;Cos.\;mr\; - \;q^s\;e^{-2mr})\;(1-e^{-2mr})\; - \;q\,e^{-(s+1)mr}\;Cos.\{(s+1)\,mr\} + (1+q^2)\;e^{-(s+2)mr}\;Cos.\;smr\; - \;q\,e^{-(s+3)mr}\;Cos.\{(s-1)mr\}}{(1-2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr+q^2\,e^{-2mr})\,(q^2-2\,q\,e^{-mr}\,Cos.\,mr+e^{-2mr})}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (1160),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\;srx}{1-2\,q\,Cos.\,rx+q^2}\,\frac{dx}{x(m^2-x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\left\{\frac{1-q^s}{(1-q)^2} + \frac{q^s-Cos.\;smr}{1-2\,q\,Cos.\,mr+q^2}\right\} \dots (1161),$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,srx}{1-2qCos.rx+q^2}\,\frac{dx}{x(m^4-x^4)} = \frac{\pi}{4m^4}\left\{2\,\frac{1-q^s}{(1-q)^2} + \frac{q^s-e^{-smr}}{(1-qe^{-mr})(1-qe^{mr})} + \frac{q^s-Cos.\,smr}{1-2qCos.mr+q^2}\right\}.(1162).$$

$$\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.rx-q^s\,Cos.srx+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{(1-2q\,Cos.rx+q^2)(1-2u\,Cos.rx+u^2)}\,\frac{dx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m(1-ue^{-mr})(1-ue^{mr})}\left\{\frac{1-q^se^{-smr}}{1-qe^{-mr}}-\frac{1-q^su^s}{1-qu}\,\frac{u}{1-u^2}\,(e^{mr}-e^{-mr})\right\}\dots(1170),$$

$$\int_0^\infty \frac{q\,Sin.rx-q^s\,Sin.srx+q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)rx\}}{(1-2q\,Cos.rx+q^2)(1-2u\,Cos.rx+u^2)}\,\frac{xdx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2(1-ue^{-mr})(1-ue^{mr})}\left\{\frac{1-q^se^{-smr}}{1-qe^{-mr}}-\frac{1-q^su^s}{1-qu}\right\}\dots(1171),$$

$$\int_0^\infty \frac{q(1+q)(1-Cos.rx)-q^s(1-Cos.srx)+q^{s+1}[2\,Cos.rx-Cos.srx-Cos.\{(s-1)rx\}]-q^{s+2}[1-Cos.\{(s-1)rx\}]}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,Tg.rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left[1-q^s-(1-q)\;Tang.mr\;\frac{q\,Sin.mr-q^s\,Sin.smr+q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right]\dots(1172),$$

$$\int_0^\infty \frac{q\,Sin.rx-q^s\,Sin.srx+q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\;Tang.rx\;\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\;Tang.mr.\left[\frac{1-q^s}{1-q}-\frac{1-q\,Cos.mr-q^s\,Cos.smr+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right]\dots(1173),$$

$$\int_0^\infty \frac{q(1+q)(1-Cos.rx)-q^s(1-Cos.srx)+q^{s+1}[2\,Cos.rx-Cos.srx-Cos.\{(s-1)rx\}]-q^{s+2}[1-Cos.\{(s-1)rx\}]}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\,Cot.rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1-q^s-(1-q)\;Cot.mr\;\frac{q\,Sin.mr-q^s\,Sin.smr+q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right]\dots(1174),$$

$$\int_0^\infty \frac{q\,Sin.rx-q^s\,Sin.srx+q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\;Cot.rx\;\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\;Cot.mr.\left[\frac{1-q^s}{1-q}-\frac{1-q\,Cos.mr-q^s\,Cos.smr+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right]\dots(1175),$$

$$\int_0^\infty \frac{(1+q)(1-Cos.rx)-q^{s-1}(1-Cos.srx)+q^s[2\,Cos.rx-Cos.srx-Cos.\{(s-1)rx\}]-q^{s+1}[1-Cos.\{(s-1)rx\}]}{1-2q\,Cos.rx+q^2}$$

$$Cosec.rx\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}(1-q)\;Cosec.mr\;\frac{Sin.mr-q^{s-1}\,Sin.smr+q^s\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\dots(1176),$$

$$\int_0^\infty \frac{q\,Sin.rx-q^s\,Sin.srx+q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.rx+q^2}\;Cosec.rx\;\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m}\;Cosec.mr.\left[\frac{1-q^s}{1-q}-\frac{1-q\,Cos.mr-q^s\,Cos.smr+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right]\dots(1177),$$

$$\int_0^\infty \frac{1-q\,Cos.rx-q^s\,Cos.srx+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{(1-2q\,Cos.rx+q^2)(1-2u\,Cos.rx+u^2)}\,\frac{dx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2m(1-2u\,Cos.mr+u^2)}\left\{\frac{2u}{1-u^2}\;Sin.mr\;\frac{1-q^su^s}{1-qu}+\frac{q\,Sin.mr-q^s\,Sin.smr+q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right\}\dots(1178),$$

$$\int_0^\infty \frac{q\,Sin.rx-q^s\,Sin.srx+q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)rx\}}{(1-2q\,Cos.rx+q^2)(1-2u\,Cos.rx+u^2)}\,\frac{xdx}{m^2-x^2}=\frac{\pi}{2(1-2u\,Cos.mr+u^2)}\left\{\frac{1-q^su^s}{1-qu}-\frac{1-q\,Cos.mr-q^s\,Cos.smr+q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)mr\}}{1-2q\,Cos.mr+q^2}\right\}\dots(1179).$$

---

§ V. DÉDUCTION DE QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES DOUBLES.

48. Dans le cours de ce Mémoire et spécialement dans les paragraphes III et IV nous avons évalué des intégrales définies, entre lesquelles se présentait la relation suivante:

$$\int_0^\infty \varphi(s, rx) \frac{dx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2m} \varphi_1(s, mr) \ldots (\gamma o), \quad \int_0^\infty \varphi_1(s, rx) \frac{xdx}{m^2-x^2} = \frac{\pi}{2} \varphi_2(s, mr); \ldots (\gamma \pi)$$

où quelquefois φ_2 était identique à φ, et alors ces intégrales étaient des fonctions réciproques de CAUCHY.

Dans le cas général, où φ diffère de φ_2, nous pouvons déduire de ces deux équations deux intégrales définies doubles, de nature intrinsèquement distinctes. En premier lieu faisons dans l'équation (γo) $r=y$ et dans l'autre $(\gamma \pi)$ $x=y$, $r=m$, $m=p$, multiplions la première par $\frac{ydy}{p^2-y^2}$, intégrons entre 0 et ∞ et substituons la seconde; alors:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(s, xy) \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m} \varphi_2(s, mp). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\text{CXXX})$$

En second lieu au contraire prenons dans l'équation (γo) $m=y$, et dans la seconde $(\gamma \pi)$, $x=y$, $m=p$; puis multiplions la première équation par $\frac{y^2dy}{p^2-y^2}$, intégrons encore entre les limites 0 et ∞ et substituons la dernière formule; alors nous aurons:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(s, rx) \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4} \varphi_2(s, pr). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\text{CXXXI})$$

Maintenant soit φ_2 égale à la fonction φ, ce qui arrive souvent; dans ce cas nous déduisons des théorèmes précédents les formules suivantes:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(s, xy) \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m} \varphi(s, mp), \quad \ldots \ldots \ldots (\text{CXXXII})$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(s, rx) \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4} \varphi(s, pr). \quad \ldots \ldots \ldots (\text{CXXXIII})$$

Mais dans ce cas-ci permutons encore les substitutions précédentes dans les équations (γo), $(\gamma \pi)$; multiplions auprès des deux transformations par $\frac{dy}{p^2-y^2}$ et agissons en outre comme précédemment, alors nous trouverons les deux théorèmes:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_1(s,xy)\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}\ \varphi_1(s,mp), \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(CXXXIV)}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_1(s,rx)\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}\ \varphi_1(s,pr). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(CXXXV)}$$

Or, il arrive souvent auprès des nos intégrales, trouvées dans les paragraphes III et IV, que φ_2, inégale à φ, n'en diffère que d'une fonction, indépendante de m: soit alors $\varphi_2 = A + \varphi$. Lorsque dans la transformation on la multiplie par $\frac{dy}{p^2-y^2}$ pour intégrer ensuite entre les limites 0 et ∞, comme l'exige la discussion précédente, on tomberait sur un terme complémentaire $\int_0^\infty A\frac{dy}{p^2-y^2} = A\int_0^\infty \frac{dy}{p^2-y^2}$, qui s'annule en raison de la valeur zéro de cette intégrale définie. Par conséquent ici les théorèmes (CXXXIV), (CXXXV) ne cessent de valoir. Mais il n'en est plus ainsi pour la $\varphi_1(x)$ dans les deux théorèmes précédents (CXXXII), (CXXXIII), qui comporteraient un terme complémentaire $\int_0^\infty A\frac{ydy}{p^2-y^2}$ ou $\int_0^\infty A\frac{y^2dy}{p^2-y^2}$, lequel deviendrait infini en conséquence de la valeur de ces deux intégrales.

49. Passons maintenant aux applications, dont nous n'écrirons que les résultats: et commençons par les formules du § III.

Les intégrales (557) et (558) donnent par les théorèmes (CXXX) et (CXXXI) et par (CXXXIV) et (XXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^s xy.\ Cos.\, sxy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m}(2^{-s} - Cos.^s mp.\ Cos.\, smp) \ldots (1)$ [110], $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.\, srx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4}(2^{-s} - Cos.^s pr.\ Cos.\, spr) \ldots (2)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^s xy.\ Sin.\, sxy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^s mp.\ Sin.\, smp \ldots (3)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin.\, srx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^s pr.\ Sin.\, spr \ldots (4)$; — (559) et (560) seulement par (CXXXI) et (CXXXV), puisqu'on ne peut plus employer les théorèmes (CXXX) et (CXXXIV) à cause des différentes constantes r: $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^s rx.\ Cos.^{s_1} r_1 x \ldots Cos.\{(sr+s_1r_1+\ldots)x\}\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4}(2^{-s-s_1-\ldots} -$

[110] Les intégrales suivantes étant toutes des intégrales définies doubles, on les a énumerées de nouveau (1) etc.

$-\ \mathrm{Cos.}^{s} rp.\ \mathrm{Cos.}^{s_1} r_1 p \ldots\ \mathrm{Cos.}\{(sr+s_1r_1+\ldots)p\}$ ..... (5), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{s} rx.\ \mathrm{Cos.}^{s_1} r_1 x \ldots$ $\mathrm{Sin.}\{(sr+s_1r_1+\ldots)x\}\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dx}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cos.}^{s} rp.\ \mathrm{Cos.}^{s_1} r_1 p \ldots \mathrm{Sin.}\{(sr+s_1r_1+\ldots)p\}$ ... (6); — (581) et (582) par (CXXX) et (CXXXI) et par (CXXXIV) et (CXXXV):

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^{s} xy.\ \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - sxy)\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m}\{2^{-s} - \mathrm{Sin.}^{s} mp.\ \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smp)\} \ldots (7),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4}\{2^{-s} - \mathrm{Sin.}^{s} pr.\ \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - spr)\} \ldots (8),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^{s} xy.\ \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - sxy)\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Sin.}^{s} mp.\ \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - smp) \ldots (9),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - srx)\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Sin.}^{s} pr.\ \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - spr) \ldots (10); —$$

(583) et (584) seulement par (CXXXI) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots$ $\mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x\}\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4}[2^{-s-s_1-\ldots} - \mathrm{Sin.}^{s} pr.$ $\mathrm{Sin.}^{s_1} pr_1 \ldots\ \mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)p\}]$ ... (11), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots$ $\mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)x\}\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Sin.}^{s} rp.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 p \ldots$ $\mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (sr+s_1r_1+\ldots)p\}]$ ... (12); — (605) et (606) seulement par (CXXXI) et (CXXXV), quand on y change les constantes p en u: $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q} ux.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} u_1 x \ldots$ $\mathrm{Sin.}^{s} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots\ \mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qu+q_1u_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\}\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$ $= \frac{\pi^2}{4}[2^{-q-q_1-\ldots-s-s_1-\ldots} - \mathrm{Cos.}^{q} pu.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} pu_1 \ldots\ \mathrm{Sin.}^{s} pr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} pr_1 \ldots\ \mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi -$ $-(qu+q_1u_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)p\}]$ ... (13), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q} ux.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} u_1 x \ldots\ \mathrm{Sin.}^{s} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots$ $\mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qu+q_1u_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)x\}\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cos.}^{q} pu.$ $\mathrm{Cos.}^{q_1} pu_1 \ldots\ \mathrm{Sin.}^{s} pr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} pr_1 \ldots\ \mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qu+q_1u_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots)p\}$ ... (14); — (632) et (633) par (CXXX) et (CXXXI) et par (CXXXIV) et (CXXXV):

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}\,xy}\ \mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\ xy)\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m}\{1 - e^{s\mathrm{Cos.}\,mp}\ \mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\ mp)\} \ldots (15),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\mathrm{Cos.}\,rx}\ \mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\ rx)\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4}\{1 - e^{s\mathrm{Cos.}\,pr}\ \mathrm{Cos.}(s\mathrm{Sin.}\ pr)\} \ldots (16),$$

$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,xy}\ Sin.(s\,Sin.\ xy)\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4p}\ e^{s\,Cos.\,mp}\ Sin.(s\,Sin.\ mp)$ ... (17),

$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx}\ Sin.(s\,Sin.\ rx)\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4p}\ e^{s\,Cos.\,pr}\ Sin.(s\,Sin.\ pr)$ ... (18); — (634) et (635) seulement par (CXXXI) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx + s_1\,Cos.\,r_1x + \dots}$ $Cos.(s\,Sin.\,rx + s_1\,Sin.\,r_1x + \dots)\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4}\ \{1 - e^{s\,Cos.\,pr + s_1\,Cos.\,pr_1 + \dots}\ Cos.(s\,Sin.\ pr + s_1\,Sin.\,pr_1 + \dots)\}$ ... (19), $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx + s_1\,Cos.\,r_1x + \dots}\ Sin.(s\,Sin.\,rx + s_1\,Sin.\,r_1x + \dots)\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4p}\ e^{s\,Cos.\,pr + s_1\,Cos.\,pr_1 + \dots}\ Sin.(s\,Sin.\ pr + s_1\,Sin.\ pr_1 + \dots)$ ... (20); — (656) et (657) par (CXXXII) et (CXXXIII) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,xy}$ $Cos.(s\,Sin.\ xy + xy)\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4m}\ e^{s\,Cos.\,mp}\ Cos.(s\,Sin.\ mp + mp)$ ... (21),

$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx}\ Cos.(s\,Sin.\,rx + rx)\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4}\ e^{s\,Cos.\,pr}\ Cos.(s\,Sin.\,pr + pr)$ ... (22),

$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,xy}\ Sin.(s\,Sin.\ xy + xy)\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4p}\ e^{s\,Cos.\,mp}\ Sin.(s\,Sin.\,mp + mp)$ ... (23),

$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx}\ Sin.(s\,Sin.\,rx + rx)\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4p}\ e^{s\,Cos.\,pr}\ Sin.(s\,Sin.\,pr + pr)$ ... (24); — (658) et (659) seulement par (CXXXIII) et (CXXXIV): $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx + s_1\,Cos.\,r_1x + \dots}$ $Cos.(s\,Sin.\ rx + s_1\ Sin.\ r_1x + \dots + r_nx)\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4}\ e^{s\,Cos.\,pr + s_1\,Cos.\,pr_1 + \dots}$ $Cos.(s\,Sin.\ pr + s_1\,Sin.\ pr_1 + \dots + pr_n)$ ... (25), $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx + s_1\,Cos.\,r_1x + \dots}\ Sin.(s\,Sin.\ rx + s_1\,Sin.\ r_1x + \dots + r_nx)\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4p}\ e^{s\,Cos.\,pr + s_1\,Cos.\,pr_1 + \dots}\ Sin.(s\,Sin.\ pr + s_1\,Sin.\ pr_1 + \dots + pr_n)$ ... (26); — (676) et (677) par (CXXXII) et (CXXXIII) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,xy}\ Cos.(s\,Sin.\,xy + xy).\ Si.(x)\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4m}\ e^{s\,Cos.\,mp}\ Cos.(s\,Sin.\ mp + mp).\ Si.(p)$ ... (27), $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,rx}\ Cos.(s\,Sin.\ rx + rx).$ $Si.(x)\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4}\ e^{s\,Cos.\,pr}\ Cos.(s\,Sin.\ pr + pr).\ Si.(p)$ ... (28), $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s\,Cos.\,xy}$ $Sin.(s\,Sin.\ xy + xy).\ Si.(x)\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\ \frac{\pi^2}{4p}\ e^{s\,Cos.\,mp}\ Sin.(s\,Sin.\ mp + mp).\ Si.(p)$ ... (29),

$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{s \, Cos. \, rx} \, Sin. (s \, Sin. \, rx + rx). \, Si.(x) \frac{x dx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} e^{s \, Cos. \, pr} \, Sin. (s \, Sin. \, pr + pr). \, Si.(p) \ldots (30)$; — (678) et (679) seulement par (CXXXIII) et (CXXXV): $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{s \, Cos. \, rx + s_1 Cos. \, r_1 x + \ldots} \, Cos. (s \, Sin. \, rx + s_1 \, Sin. \, r_1 x + \ldots + r_n x). \, Si.(x) \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4} e^{s Cos. \, pr + s_1 Cos. \, pr_1 + \ldots} \, Cos. (s \, Sin. \, pr + s_1 Sin. \, pr_1 + \ldots + pr_n). \, Si.(p) \ldots (31)$, $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{s \, Cos. \, rx + s_1 Cos. \, r_1 x + \ldots} \, Sin. (s \, Sin. \, rx + s_1 Sin. \, r_1 x + \ldots + r_n x). \, Si.(x) \frac{x dx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} e^{s Cos. \, pr + s_1 Cos. \, pr_1 + \ldots} \, Sin. (s \, Sin. \, pr + s_1 Sin. \, pr_1 + \ldots + pr_n). \, Si.(p) \ldots (32)$; — (680) et (681) seulement par (CXXXIII) et (CXXXV), lorsqu'on y change les constantes p en m: $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^q mx. \, Cos.^{q_1} m_1 x \ldots Sin.^s rx. \, Sin.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t \, Cos. \, ux + t_1 Cos. \, u_1 x + \ldots} \, Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \frac{1}{2} \pi - (qm + q_1 m_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin. \, ux - t_1 Sin. \, u_1 x - \ldots \} \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4} [2 - q - q_1 - \ldots - s - s_1 - \ldots - Cos.^q pm. \, Cos.^{q_1} pm_1 \ldots Sin.^s pr. \, Sin.^{s_1} pr_1 \ldots e^{t Cos. \, pu + t_1 Cos. \, pu_1 + \ldots} \, Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \frac{1}{2} \pi - (qm + q_1 m_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) p - t \, Sin. \, pu - t_1 Sin. \, pu_1 - \ldots \}] \ldots (33)$, $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^q mx. \, Cos.^{q_1} m_1 x \ldots Sin.^s rx. \, Sin.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t Cos. \, ux + t_1 Cos. \, u_1 x + \ldots} \, Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \frac{1}{2} \pi - (qm + q_1 m_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) x - t \, Sin. \, ux - t_1 Sin. \, u_1 x - \ldots \} \frac{x dx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Cos.^q pm. \, Cos.^{q_1} pm_1 \ldots Sin.^s pr. \, Sin.^{s_1} pr_1 \ldots e^{t Cos. \, pu + t_1 Cos. \, pu_1 + \ldots} \, Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \frac{1}{2} \pi - (qm + q_1 m_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots) p - t \, Sin. \, pu - t_1 Sin. \, pu_1 - \ldots \} \ldots (34)$; — (692) et (693) seulement par (CXXXIII) et (CXXXV), avec changement des p en des m: $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^q mx. \, Cos.^{q_1} m_1 x \ldots Sin.^s rx. \, Sin.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t Cos. \, ux + t_1 Cos. \, u_1 x + \ldots} \, Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \frac{1}{2} \pi - (qm + q_1 m_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_n) x - t \, Sin. \, ux - t_1 Sin. \, u_1 x - \ldots \} \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4} \{ Cos.^q pm. \, Cos.^{q_1} pm_1 \ldots Sin.^s pr. \, Sin.^{s_1} pr_1 \ldots e^{t Cos. \, pu + t_1 Cos. \, pu_1 + \ldots} \, Cos. \{ (s + s_1 + \ldots) \frac{1}{2} \pi - (qm + q_1 m_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_n) p - t \, Sin. \, pu - t_1 Sin. \, pu_1 - \ldots \} \ldots (35)$, $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^q mx. \, Cos.^{q_1} m_1 x \ldots Sin.^s rx. \, Sin.^{s_1} r_1 x \ldots e^{t Cos. \, ux + t_1 Cos. \, u_1 x + \ldots} \, Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \frac{1}{2} \pi - (qm + q_1 m_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_n) x - t \, Sin. \, ux - t_1 Sin. \, u_1 x - \ldots \} \frac{x dx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Cos.^q pm. \, Cos.^{q_1} pm_1 \ldots Sin.^s pr. \, Sin.^{s_1} pr_1 \ldots e^{t Cos. \, pu + t_1 Cos. \, pu_1 + \ldots} \, Sin. \{ (s + s_1 + \ldots) \frac{1}{2} \pi - (qm + q_1 m_1 + \ldots + sr + s_1 r_1 + \ldots + u_n) p - t \, Sin. \, pu -$

$-t_1 \mathrm{Sin.}\, pu_1 - \ldots\}$ ... (36); — (698) et (699) (changez-y q, p en s, r), (700) et (701) seulement par (CXXXIII) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}^{s_1} r_1 x \ldots \mathrm{Cos.}\, tx \frac{dx}{y^2-x^2}\frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Cos.}^s pr.\ \mathrm{Cos.}^{s_1} pr_1 \ldots \mathrm{Cos.}\, pt$ ... (37), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}^{s_1} r_1 x \ldots \mathrm{Sin.}\, tx \frac{xdx}{y^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\mathrm{Cos.}^s pr.\ \mathrm{Cos.}^{s_1} pr_1 \ldots \mathrm{Sin.}\, pt$ ... (38), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\frac{dx}{y^2-x^2}\frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Sin.}^s pr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} pr_1 \ldots \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - pt)$ ... (39), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\frac{xdx}{y^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\mathrm{Sin.}^s pr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} pr_1 \ldots \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - pt)$ ... (40), (où partout on a $t > sr + s_1 r_1 + \ldots$); — (702) et (703) (après y avoir changé q, p en s, r), (704) et (705) par (CXXXIII) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}\, tx \frac{dx}{y^2-x^2}\frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Cos.}^s pr.\ \mathrm{Cos.}\, pt$ ... (41), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}\, tx \frac{xdx}{y^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\mathrm{Cos.}^s pr.\ \mathrm{Sin.}\, pt$ ...... (42), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\frac{dx}{y^2-x^2}\frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Sin.}^s pr.\ \mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{2}s\pi - pt)$ ... (43), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - tx)\frac{xdx}{y^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\mathrm{Sin.}^s pr.\ \mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{2}s\pi - pt)$ ... (44), (où partout on a $t > sr$); — encore (730) et (731) par (CXXXIII) et (CXXXV), après qu'on y a changé les m en des p: $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q mx.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} m_1 x \ldots \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\mathrm{Cos.}\, ux + t_1 \mathrm{Cos.}\, u_1 x + \ldots} \mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qm+q_1m_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_a)x - t\,\mathrm{Sin.}\, ux - t_1 \mathrm{Sin.}\, u_1 x - \ldots\}.\ \mathrm{Si.}(x)\frac{dx}{y^2-x^2}\frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} m_1 p \ldots \mathrm{Sin.}^s pr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} pr_1 \ldots e^{t\mathrm{Cos.}\, pu + t_1 \mathrm{Cos.}\, pu_1 + \ldots} \mathrm{Cos.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qm+q_1m_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_a)p - t\,\mathrm{Sin.}\, pu - t_1 \mathrm{Sin.}\, pu_1 - \ldots\}.\ \mathrm{Si.}(p)$ ... (45), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q mx.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} m_1 x \ldots \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} r_1 x \ldots e^{t\mathrm{Cos.}\, ux + t_1 \mathrm{Cos.}\, u_1 x + \ldots} \mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qm+q_1m_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_a)x - t\,\mathrm{Sin.}\, ux - t_1 \mathrm{Sin.}\, u_1 x - \ldots\}.\ \mathrm{Si.}(x)\frac{xdx}{y^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Cos.}^{q_1} m_1 p \ldots \mathrm{Sin.}^s pr.\ \mathrm{Sin.}^{s_1} pr_1 \ldots e^{t\mathrm{Cos.}\, pu + t_1 \mathrm{Cos.}\, pu_1 + \ldots} \mathrm{Sin.}\{(s+s_1+\ldots)\tfrac{1}{2}\pi - (qm+q_1m_1+\ldots+sr+s_1r_1+\ldots+u_a)p - t\,\mathrm{Sin.}\, pu - t_1 \mathrm{Sin.}\, pu_1 - \ldots\}.\ \mathrm{Si.}(p)$ ... (46); —

(732) et (733) (après qu'on y a changé q, p en s, r), et (734) et (735) seulement par (CXXXIII) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Cos.$^2 rx$. Cos. tx. Si.(x) $\frac{dx}{y^2-x^2}$ $\frac{y^2dy}{p^2-y^2}$ $=$ $= -\frac{\pi^2}{4}$ Cos.^2pr. Cos. pt. Si.(p) ... (47), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Cos.^2rx. Sin. tx. Si.(x) $\frac{xdx}{y^2-x^2}$ $\frac{dy}{p^2-y^2}$ $=$ $= -\frac{\pi^2}{4p}$ Cos.^2pr. Sin. pt. Si.(p) ... (48), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin.^2rx. Cos.$(\frac{1}{2}s\pi - tx)$. Si.(x) $\frac{dx}{y^2-x^2}$ $\frac{y^2dy}{p^2-y^2}$ $=$ $= -\frac{\pi^2}{4}$ Sin.^2pr. Cos.$(\frac{1}{2}s\pi - pt)$. Si.(p) .... (49), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin.^2rx. Sin.$(\frac{1}{2}s\pi - tx)$. Si.(x) $\frac{xdx}{y^2-x^2}$ $\frac{dy}{p^2-y^2}$ $= -\frac{\pi^2}{4p}$ Sin.^2pr. Sin.$(\frac{1}{2}s\pi - pt)$ Si.(p) ... (50), (où partout il est $t > sr$); — (736) et (737) par (CXXX) et (CXXXI) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin. $2sxy$. Cot. xy $\frac{dx}{m^2-x^2}$ $\frac{ydy}{p^2-y^2}$ $= \frac{\pi^2}{4m}$ $\{1 -$ Sin. $2smp$. Cot. $mp\}$ ... (51), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin. $2srx$. Cot. rx $\frac{dx}{y^2-x^2}$ $\frac{y^2dy}{p^2-y^2}$ $= \frac{\pi^2}{4}$ $\{1 -$ Sin. $2spr$. Cot. $pr\}$ ... (52), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin.$^2 sxy$. Cot. xy $\frac{xdx}{m^2-x^2}$ $\frac{dy}{p^2-y^2}$ $= -\frac{\pi^2}{4p}$ Sin.$^2 smp$. Cot. mp .... (53), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin.$^2 srx$. Cot. rx $\frac{xdx}{y^2-x^2}$ $\frac{dy}{p^2-y^2}$ $= -\frac{\pi^2}{4p}$ Sin.^2spr. Cot. pr ... (54); — (747) et (746) seulement par (CXXXIV): $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin. $2sxy$. Cot. xy. Si.(x) $\frac{xdx}{m^2-x^2}$ $\frac{dy}{p^2-y^2}$ $=$ $= \frac{\pi^2}{4p}$ Si.(m). $\{1 -$ Sin. $2smp$. Cot. $mp\}$ ... (55); — (748) et (749) par (CXXX) et (CXXXI) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin. $4sxy$. Tang. xy $\frac{dx}{m^2-x^2}$ $\frac{ydy}{p^2-y^2}$ $= -\frac{\pi^2}{4m}$ $\{1 +$ Sin. $4smp$. Tang. $mp\}$ ... (56), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin. $4srx$. Tang. rx $\frac{dx}{y^2-x^2}$ $\frac{y^2dy}{p^2-y^2}$ $= -\frac{\pi^2}{4}$ $\{1 +$ Sin. $4spr$. Tang. $pr\}$ ... (57), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin.$^2 2sxy$. Tang. xy $\frac{xdx}{m^2-x^2}$ $\frac{dy}{p^2-y^2}$ $= -\frac{\pi^2}{4p}$ Sin.$^2 2smp$. Tang. mp ... (58), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin.$^2 2srx$. Tang. rx $\frac{xdx}{y^2-x^2}$ $\frac{dy}{p^2-y^2}$ $= -\frac{\pi^2}{4p}$ Sin.^2spr. Tang. pr ... (59). Encore (750) et (751) également: $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin. $2sxy$. Cosec. xy $\frac{dx}{m^2-x^2}$ $\frac{ydy}{p^2-y^2}$ $=$ $= -\frac{\pi^2}{4m}$ Sin. $2smp$. Cosec. mp ... (60), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin. $2srx$. Cosec. rx $\frac{dx}{y^2-x^2}$ $\frac{y^2dy}{p^2-y^2}$ $=$ $= -\frac{\pi^2}{4}$ Sin. $2spr$. Cosec. pr ... (61), $\int_0^\infty\int_0^\infty$ Sin.^2sxy. Cosec. xy $\frac{xdx}{m^2-x^2}$ $\frac{dy}{p^2-y^2}$ $=$

$= - \frac{\pi^2}{4p} \, Sin.^2 smp. \; Cosec. \, mp \, \ldots \, (62)$, $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^2 srx. \; Cosec. \, rx \, \frac{xdx}{y^2 - x^2} \, \frac{dy}{p^2 - y^2} =$
$= - \frac{\pi^2}{4p} \, Sin.^2 spr. \; Cosec. \, pr \, \ldots \, (63)$; — (769) et (768) seulement par (CXXXIV):
$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin. \, 4sxy. \; Tang. \, xy. \; Si.(x) \, \frac{xdx}{m^2 - x^2} \, \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} \, Si.(m). \, \{ 1 + Sin. \, 4smp. \; Tang. \, mp \} \, \ldots \, (64)$; — (770) et (771) par (CXXXII) et (CXXXIII) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^2 sxy. \; Cosec. \, xy. \; Si.(x) \, \frac{dx}{m^2 - x^2} \, \frac{ydy}{p^2 - y^2} =$
$= - \frac{\pi^2}{4m} \, Sin.^2 smp. \; Cosec. \, mp. \; Si.(p) \, \ldots \, (65)$, $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^2 srx. \; Cosec. \, rx. \; Si.(x) \, \frac{dx}{y^2 - x^2} \, \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} =$
$= - \frac{\pi^2}{4} \, Sin.^2 spr. \; Cosec. \, pr. \; Si.(p) \, \ldots \, (66)$, $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin. \, 2sxy. \; Cosec. \, xy. \; Si.(x) \, \frac{xdx}{m^2 - x^2} \, \frac{dy}{p^2 - y^2} =$
$= - \frac{\pi^2}{4p} \, Sin. \, 2smp. \; Cosec. \, mp. \; Si.(p) \, \ldots \, (67)$, $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin. \, 2srx. \; Cosec. \, rx. \; Si.(x) \, \frac{xdx}{y^2 - x^2} \, \frac{dy}{p^2 - y^2} =$
$= - \frac{\pi^2}{4p} \, Sin. \, 2spr. \; Cosec. \, pr. \; Si.(p) \, \ldots \, (68)$; — et encore de même (773) et (772):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{Cos. \, sxy - q Cos. \{(s-1)xy\}}{1 - 2q Cos. \, xy + q^2} \, \frac{dx}{m^2 - x^2} \, \frac{ydy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4m} \, \frac{Cos. \, smp - q Cos. \{(s-1)mp\}}{1 - 2q Cos. \, mp + q^2} \, \ldots \, (69),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{Cos. \, srx - q Cos. \{(s-1)rx\}}{1 - 2q Cos. \, rx + q^2} \, \frac{dx}{y^2 - x^2} \, \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4} \, \frac{Cos. \, spr - q Cos. \{(s-1)pr\}}{1 - 2q Cos. \, pr + q^2} \, \ldots \, (70),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{Sin. \, sxy - q Sin. \{(s-1)xy\}}{1 - 2q Cos. \, xy + q^2} \, \frac{xdx}{m^2 - x^2} \, \frac{dy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4p} \, \frac{Sin. \, smp - q Sin. \{(s-1)mp\}}{1 - 2q Cos. \, mp + q^2} \, \ldots \, (71),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{Sin. \, srx - q Sin. \{(s-1)rx\}}{1 - 2q Cos. \, rx + q^2} \, \frac{xdx}{y^2 - x^2} \, \frac{dy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4p} \, \frac{Sin. \, spr - q Sin. \{(s-1)pr\}}{1 - 2q Cos. \, pr + q^2} \, \ldots \, (72).$$

50. Dans le paragraphe IV nous rencontrons de nouvelles intégrales qui pourront nous servir ici. Ainsi les intégrales (831) et (830) donnent tant par les théorèmes (CXXXII) et (CXXXIII) que par les autres (CXXXIV) et (CXXXV):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^s xy. \, Sin. \, sxy. \, Tang. \, 2ry \, \frac{dx}{m^2 - x^2} \, \frac{ydy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4m} (1 + Tang. \, 2mp. \, Cos.^s mp. \, Sin. \, smp) \, \ldots \, (73),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^s rx. \; Sin. \, srx. \; Tang. \, 2rx \, \frac{dx}{y^2 - x^2} \, \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4} (1 + Tang. \, 2pr. \; Cos.^s pr. \; Sin. \, spr) \, \ldots \, (74),$$

$\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s xy. \; Cos. \, sxy) \; Tang. \, 2ry \, \frac{xdx}{m^2 - x^2} \, \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} \; Tang. \, 2mp. \, (1 - Cos.^s mp. \; Cos. \, smp) \, \ldots\ldots \, (75)$, $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s rx. \; Cos. \, srx) \; Tang. \, 2rx \, \frac{xdx}{y^2 - x^2} \, \frac{dy}{p^2 - y^2} =$

$= - \frac{\pi^2}{4p} \, Tang.\, 2pr.\, (1 - Cos.^s pr.\; Cos.\, spr)$ ... (76); — (833) et (832) de même: $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^s xy.\; Sin.\, sxy.\; Cot.\, 2xy \frac{dx}{m^2 - x^2} \frac{ydy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4m} (1 - Cot.\, 2mp.\; Cos.^s mp.\; Sin.\, smp)$ ... (77), $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^s rx.\; Sin.\, srx.\; Cot.\, 2rx \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4} (1 - Cot.\, 2pr.\; Cos.^s pr.\; Sin.\, spr)$ ... (78), $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s xy.\; Cos.\, sxy)\, Cot.\, 2xy \frac{xdx}{m^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Cot.\, 2mp.\, (1 - Cos.^s mp.\; Cos.\, smp)$. (79), $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s rx.\; Cos.\, srx)\, Cot.\, 2rx \frac{xdx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Cot.\, 2pr.\, (1 - Cos.^s pr.\; Cos.\, spr)$ ... (80). — Encore (835) et (834) également: $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^{s-1} xy.\; Sin.\, sxy.\; Cosec.\, xy \frac{dx}{m^2 - x^4} \frac{ydy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4m} Cosec.\, mp.\; Cos.^{s-1} mp.\; Sin.\, smp$ .... (81), $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\; Sin.\, srx.\; Cosec.\, rx \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4} Cosec.\, pr.\; Cos.^{s-1} pr.\; Sin.\, spr$ .... (82), $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s xy.\; Cos.\, sxy)\, Cosec.\, 2xy \frac{xdx}{m^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} =$ $= - \frac{\pi^2}{4p} Cosec.\, 2mp.\, (1 - Cos.^s mp.\; Cos.\, smp)$ ..... (83), $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s rx.\; Cos.\, srx)\, Cosec.\, 2rx \frac{xdx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Cosec.\, 2pr.\, (1 - Cos.^s pr.\; Cos.\, spr)$ ... (84); — (856) et (855) par (CXXX) et (CXXXI) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s xy.\; Sin.(\frac{1}{2} s\pi - sxy).\; Tang.\, 2xy \frac{dx}{m^2 - x^2} \frac{ydy}{p^2 - y^4} = - \frac{\pi^2}{4m} Tang.\, 2mp.\; Sin.^s mp.\; Sin.(\frac{1}{2} s\pi - smp)$ ... (85), $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s rx.\; Sin.(\frac{1}{2} s\pi - srx).\; Tang.\, 2rx \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} =$ $= - \frac{\pi^2}{4} Tang.\, 2pr.\; Sin.^s pr.\; Sin.(\frac{1}{2} s\pi - spr)$ ... (86), $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s xy.\; Cos.(\frac{1}{2} s\pi - sxy).\; Tang.\, 2xy \frac{xdx}{m^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Tang.\, 2mp.\; Sin.^s mp.\; Cos.(\frac{1}{2} s\pi - smp)$ ... (87), $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s rx.\; Cos.(\frac{1}{2} s\pi - rx).\; Tang.\, 2rx \frac{xdx}{y^2 - x^4} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Tang.\, 2pr.\; Sin.^s pr.\; Cos.(\frac{1}{2} s\pi - spr)$ ... (88); — (858) et (857) par les mêmes théorèmes: $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s xy.\; Sin.(\frac{1}{2} s\pi - sxy).\; Cot.\, 2xy \frac{dx}{m^2 - x^2} \frac{ydy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4m} Cot.\, 2mp.\; Sin.^s mp.\; Sin.(\frac{1}{2} s\pi - smp)$ ... (89), $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s rx.\; Sin(\frac{1}{2} s\pi - srx).\; Cot.\, 2rx \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4} Cot.\, 2pr.\; Sin.^s pr.$

$Sin.(\frac{1}{2}s\pi - spr)$ ... (90), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^s xy.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - sxy).\ Cot.\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$ $= -\frac{\pi^2}{4p}\ Cot.\ 2mp.\ Sin.^s mp.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - smp)$ ... (91), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - srx).$ $Cot.\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cot.\ 2pr.\ Sin.^s pr.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - spr)$ ... (92); — et encore également (860) et (859): $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1} xy.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - sxy).\ Sec.xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} =$ $= -\frac{\pi^2}{4m}\ Sec.\ mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - smp)$ ... (93), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1} rx.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - srx).$ $Sec.\ rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ Sec.\ pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - spr)$ ...... (94), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1} xy.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - sxy).\ Sec.\ xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Sec.\ mp.\ Sin.^{s-1} mp.$ $Cos.(\frac{1}{2}s\pi - smp)$ ... (95), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1} rx.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - srx).\ Sec.\ rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$ $= -\frac{\pi^2}{4p}\ Sec.\ pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - spr)$ ... (96). — (877) et (876) par l'intermédiaire des théorèmes (CXXX) et (CXXXI), (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)xy\}.\ Tang.\ 2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\ Cos.^q mp.$ $Sin.^s mp.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)mp\}.\ Tang.\ 2mp$ ... (97), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)rx\}.$ $Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)pr\}.\ Tang.\ 2pr$ ... (98), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)xy\}.\ Tang.2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^q mp.\ Sin.^s mp.$ $Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)mp\}.\ Tang.\ 2mp$ ... (99), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)rx\}.$ $Tang.2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)pr\}.\ Tang.2pr$ ... (100); — (879) et (878) tout de même: $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)xy\}.$ $Cot.\ 2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\ Cos.^q mp.\ Sin.^s mp.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)mp\}.\ Cot.\ 2mp$ ... (101), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)rx\}.\ Cot.2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.$ $Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)pr\}.\ Cot.\ 2pr$ ... (102), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)xy\}.$



$\mathrm{Cot.}\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp\right\}.\ \mathrm{Cot.}\ 2mp$ ... (103),

$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.\ \mathrm{Cot.}\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cos.}^q pr.\ \mathrm{Sin.}^s pr.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr\right\}.\ \mathrm{Cot.}\ 2pr$ ..... (104); — et encore (881) et (880):

$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} xy.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} xy.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy\right\}\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} mp.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} mp.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp\right\}$ .... (105),

$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} pr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} pr.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr\right\}$. (106),

$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} xy.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} xy.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy\right\}\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} mp.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} mp.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp\right\}$ ... (107),

$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} pr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} pr.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr\right\}$ ... (108).

Tant par les théorèmes (CXXXII) et (CXXXIII) que par (CXXXIV) et (CXXXV) les intégrales (997) et (996) donnent: $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q xy.\ \mathrm{Sin.}^s xy.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,\mathrm{Sin.}\ 2xy\right\}.\ \mathrm{Tang.}\ 2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m}\ \mathrm{Tang.}\ 2mp.\ \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mp\right\}$ ... (109),

$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\ 2rx\right\}.\ \mathrm{Tang.}\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4}\ \mathrm{Tang.}\ 2pr.\ \mathrm{Cos.}^q pr.\ \mathrm{Sin.}^s pr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2pr}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2pr\right\}$ ... (110),

$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q xy.\ \mathrm{Sin.}^s xy.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,\mathrm{Sin.}\ 2xy\right\}.\ \mathrm{Tang.}\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Tang.}\ 2mp.\ \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mp\right\}$ ... (111),

$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\ 2rx\right\}.\ \mathrm{Tang.}\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Tang.}\ 2pr.\ \mathrm{Cos.}^q pr.\ \mathrm{Sin.}^s pr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2pr}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2pr\right\}$ ... (112); — de même (999) et (998): $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q xy.\ \mathrm{Sin.}^s xy.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,\mathrm{Sin.}\,2xy\right\}.\ \mathrm{Cot.}\,2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m}\ \mathrm{Cot.}\ 2mp.\ \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mp\right\}$ ... (113).

$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Cot.\,2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4}\ Cot.\,2pr.\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ e^{t\,Cos.\,2pr}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,Sin.\,2pr\right\}\ \dots\ (114),$$
$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ e^{t\,Cos.\,2xy}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,Sin.\,2xy\right\}.\ Cot.\,2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4p}\ Cot.\,2mp.\ Cos.^q mp.\ Sin.^s mp.\ e^{t\,Cos.\,2mp}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,Sin.\,2mp\right\}\ \dots\ (115),$$
$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Cot.\,2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4p}\ Cot.\,2pr.\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ e^{t\,Cos.\,2pr}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,Sin.\,2pr\right\}\ \dots\ (116);$$

— encore également (1001) et (1000): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} xy.\ Sin.^{s-1} xy.\ e^{t\,Cos.\,2xy}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,Sin.\,2xy\right\}\frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4m}\ Cos.^{q-1} mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ e^{t\,Cos.\,2mp}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,Sin.\,2mp\right\}$ ... (117), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}\frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4}\ Cos.^{q-1} pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ e^{t\,Cos.\,2pr}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,Sin.\,2pr\right\}$ ... (118), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} xy.\ Sin.^{s-1} xy.\ e^{t\,Cos.\,2xy}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,Sin.\,2xy\right\}\frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^{q-1} mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ e^{t\,Cos.\,2mp}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,Sin.\,2mp\right\}$ ... (119), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}\frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^{q-1} pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ e^{t\,Cos.\,2pr}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,Sin.\,2pr\right\}$ ... (120). — Les intégrales (1082) et (1081) donnent par les théorèmes (CXXXII) et (CXXXIII) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ e^{t\,Cos.\,2xy}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t\,Sin.\,2xy\right\}.\ Tang.\,2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2}=$

$$=\frac{\pi^2}{4m}\ Tang.\,2mp.\ Cos.^q mp.\ Sin.^s mp.\ e^{t\,Cos.\,2mp}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t\,Sin.\,2mp\right\}\ \dots\ (121),$$
$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t\,Cos.\,2rx}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,Sin.\,2rx\right\}.\ Tang.\,2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4}\ Tang.\,2pr.\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ e^{t\,Cos.\,2pr}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t\,Sin.\,2pr\right\}\ \dots\ (122),$$

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy. Sin.^s xy. e^{t Cos. 2xy} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t Sin. 2xy\right\}. Tang. 2xy \frac{xdx}{m^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2}=$

$=\frac{\pi^2}{4p} Tang. 2mp. Cos.^q mp. Sin.^s mp. e^{t Cos. 2mp} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}$ ... (123),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx. Sin.^s rx. e^{t Cos. 2rx} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\}. Tang. 2rx \frac{xdx}{y^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2}=$

$=\frac{\pi^2}{4p} Tang. 2pr. Cos.^q pr. Sin.^s pr. e^{t Cos. 2pr} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t Sin. 2pr\right\}$ ... (124); —

encore (1084) et (1083): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy. Sin.^s xy. e^{t Cos. 2xy} Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-\right.$

$\left.-t Sin. 2xy\right\}. Cot. 2xy \frac{dx}{m^2-x^2}\frac{ydy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4m} Cot. 2mp. Cos.^q mp. Sin.^s mp. e^{t Cos. 2mp}$

$Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}$ ... (125), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx. Sin.^s rx. e^{t Cos. 2rx} Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-\right.$

$\left.-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\}. Cot. 2rx \frac{dx}{y^2-x^2}\frac{y^2dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4} Cot. 2pr. Cos.^q pr. Sin.^s pr.$

$e^{t Cos. 2pr} Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t Sin. 2pr\right\}$ ... (126), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy. Sin.^s xy. e^{t Cos. 2xy}$

$Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t Sin. 2xy\right\}. Cot. 2xy \frac{xdx}{m^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4p} Cot. 2mp. Cos.^q mp.$

$Sin.^s mp. e^{t Cos. 2mp} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}$ ... (127), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx. Sin.^s rx.$

$e^{t Cos. 2rx} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\}. Cot. 2rx \frac{xdx}{y^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4p} Cot. 2pr.$

$Cos.^q pr. Sin.^s pr. e^{t Cos. 2pr} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t Sin. 2pr\right\}$ ... (128); — et (1086) et (1085):

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} xy. Sin.^{s-1} xy. e^{t Cos. 2xy} Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t Sin. 2xy\right\} \frac{dx}{m^2-x^2}\frac{ydy}{p^2-y^2}=$

$=\frac{\pi^2}{4m} Cos.^{q-1} mp. Sin.^{s-1} mp. e^{t Cos. 2mp} Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}$ ... (129),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx. Sin.^{s-1} rx. e^{t Cos. 2rx} Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\} \frac{dx}{y^2-x^2}\frac{y^2dy}{p^2-y^2}=$

$=\frac{\pi^2}{4} Cos.^{q-1} pr. Sin.^{s-1} pr. e^{t Cos. 2pr} Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t Sin. 2pr\right\}$ ... (130),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} xy. Sin.^{s-1} xy. e^{t Cos. 2xy} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t Sin. 2xy\right\} \frac{xdx}{m^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2}=$

$=\frac{\pi^2}{4p} Cos.^{q-1} mp. Sin.^{s-1} mp. e^{t Cos. 2mp} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}$ ... (131),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx. Sin.^{s-1} rx. e^{t Cos. 2rx} Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\} \frac{xdx}{y^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2}=$

$= \frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^{q-1}pr.\ Sin.^{s-1}pr.\ e^{t\,Cos.\,2pr}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi - (q+s+2)pr - t\,Sin.\,2pr\right\}\ \ldots\ (132).$ — Dans ces douze dernières intégrales on peut bien annuler q, mais non pas t, à cause de la même condition qui a lieu pour les équations (1081) à (1086). Puis les intégrales (1090) et (1089) donnent par (CXXXII) et (CXXXIII), et par (CXXXV) et (CXXXVI): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}xy.\,Sin.^{s-1}xy.\,Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}.\,Tang.2xy\,\frac{dx}{m^2-x^2}\,\frac{ydy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4m}\ Tang.\ 2mp.\ Cos.^{q-1}mp.\ Sin.^{s-1}mp.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)mp\right\}\ \ldots\ldots\ (133),$

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\ Sin.^{s-1}rx.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)rx\right\}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4}\ Tang.\ 2pr.\ Cos.^{q-1}pr.\ Sin.^{s-1}pr.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)pr\right\}\ \ldots\ldots\ (134),$

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}xy.\ Sin.^{s-1}xy.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}.\ Tang.\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}\ Tang.\ 2mp.\ Cos.^{q-1}mp.\ Sin.^{s-1}mp.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)mp\right\}\ \ldots\ldots\ (135),$

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\ Sin.^{s-1}rx.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)rx\right\}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}\ Tang.\ 2pr.\ Cos.^{q-1}pr.\ Sin.^{s-1}pr.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)pr\right\}\ \ldots\ (136);$ — (1092) et (1091) de même: $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}xy.\,Sin.^{s-1}xy.\,Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}.\,Cot.2xy\,\frac{dx}{m^2-x^2}\,\frac{ydy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4m}\ Cot.\ 2mp.\ Cos.^{q-1}mp.\ Sin.^{s-1}mp.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)mp\right\}\ \ldots\ldots\ (137),$

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\ Sin.^{s-1}rx.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)rx\right\}.\ Cot.\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4}\ Cot.\ 2pr.\ Cos.^{q-1}pr.\ Sin.^{s-1}pr.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)pr\right\}\ \ldots\ldots\ (138),$

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}xy.\ Sin.^{s-1}xy.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}.\ Cot.\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}\ Cot.\ 2mp.\ Cos.^{q-1}mp.\ Sin.^{s-1}mp.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)mp\right\}\ \ldots\ldots\ (139),$

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\ Sin.^{s-1}rx.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)rx\right\}.\ Cot.2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}\ Cot.\ 2pr.$ $Cos.^{q-1}pr.\ Sin.^{s-1}pr.\ Cos.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)pr\right\}\ \ldots\ (140);$ — (1094) et (1093) encore: $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-2}xy.\ Sin.^{s-2}xy.\ Sin.\left\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} =$

$$= \frac{\pi^2}{4m} \; Cos.^{q-2} mp. \; Sin.^{s-2} mp. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (q+s)mp\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (141),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^{q-2} rx. \; Sin.^{s-2} rx. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (q+s)rx\} \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2 dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \; Cos.^{q-2} pr. \; Sin.^{s-2} pr. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (q+s)pr\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (142),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^{q-2} xy. \; Sin.^{s-2} xy. \; Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (q+s)xy\} \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4p} \; Cos.^{q-2} mp. \; Sin.^{s-2} mp. \; Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (q+s)mp\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (143),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^{q-2} rx. \; Sin.^{s-2} rx. \; Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (q+s)rx\} \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4p} \; Cos.^{q-2} pr. \; Sin.^{s-2} pr. \; Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (q+s)pr\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (144); -$$

(1098) et (1097) par (CXXXII) et (CXXXIII) et par (CXXXIV) et (CXXXV):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-1} xy. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)xy\}. \; Tang.\, 2xy \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4m} \; Tang.\, 2mp. \; Sin.^{s-1} mp. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mp\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (145),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-1} rx. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)rx\}. \; Tang.\, 2rx \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2 dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \; Tang.\, 2pr. \; Sin.^{s-1} pr. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)pr\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (146),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-1} xy. \; Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)xy\}. \; Tang.\, 2xy \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4p} \; Tang.\, 2mp. \; Sin.^{s-1} mp. \; Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mp\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (147),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-1} rx. \; Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)rx\}. \; Tang.\, 2rx \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4p} \; Tang.\, 2pr. \; Sin.^{s-1} pr. \; Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)pr\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (148); -$$

(1100) et (1099) de même: $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-1} xy. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)xy\}.$

$$Cot.\, 2xy \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m} \; Cot.\, 2mp. \; Sin.^{s-1} mp. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mp\} \quad \ldots (149),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-1} rx. \; Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)rx\}. \; Cot.\, 2rx \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2 dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \quad Cot.\ 2pr. \quad Sin.^{s-1} pr. \quad Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)pr\} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (150),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-1} xy. \quad Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)xy\}. \quad Cot.\ 2xy \quad \frac{xdx}{m^2-x^2} \quad \frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4p} \quad Cot.\ 2mp. \quad Sin.^{s-1} mp. \quad Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mp\} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (151),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-1} rx. \quad Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)rx\}. \quad Cot.\ 2rx \quad \frac{xdx}{y^2-x^2} \quad \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p} \quad Cot.\ 2pr.$$

$Sin.^{s-1} pr. \quad Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)pr\}$ ... (152); — (1102) et (1101) encore:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-2} xy. \quad Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)xy\}. \quad Sec.\ xy \quad \frac{dx}{m^2-x^2} \quad \frac{ydy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4m} \quad Sin.^{s-2} mp. \quad Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mp\}. \quad Sec.\ mp \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (153),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-2} rx. \quad Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)rx\}. \quad Sec.\ rx \quad \frac{dx}{y^2-x^2} \quad \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \quad Sin.^{s-2} pr. \quad Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)pr\}. \quad Sec.\ pr \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (154),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-2} xy. \quad Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)xy\}. \quad Sec.\ xy \quad \frac{xdx}{m^2-x^2} \quad \frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4p} \quad Sin.^{s-2} mp. \quad Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)mp\}. \quad Sec.\ mp \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (155),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^{s-2} rx. \quad Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)rx\}. \quad Sec.\ rx \quad \frac{xdx}{y^2-x^2} \quad \frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4p} \quad Sin.^{s-2} pr. \quad Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi - (s+1)pr\}. \quad Sec.\ pr \ \ldots\ldots\ldots\ldots (156). \ —$$

Les intégrales (1119) et (1118) par les théorèmes (CXXX) et (CXXXI), et (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty \int_0^\infty [- Sin.\ 2sxy + (1 - Cos.\ 2sxy) \quad Cot.\ xy]$ $Tang.\ 2xy \quad \frac{dx}{m^2-x^2} \quad \frac{ydy}{p^2-y^2} = - \frac{\pi^2}{4m} \quad [2s + Tang.\ 2mp. \ \{- Sin.\ 2smp + (1 - Cos.\ 2smp)$ $Cot.\ mp\}]$ ... (157), $\int_0^\infty \int_0^\infty [-Sin.\ 2srx + (1-Cos.\ 2srx) \quad Cot.\ rx] \quad Tang.\ 2rx \quad \frac{dx}{y^2-x^2} \quad \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$$= - \frac{\pi^2}{4} \quad [2s + Tang.\ 2pr. \ \{- Sin.\ 2spr + (1 - Cos.\ 2spr) \quad Cot.\ pr\}] \ \ldots\ldots (158),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty [2s - 1 + Cos.\ 2sxy - Sin.\ 2sxy. \quad Cot.\ xy] \quad Tang.\ 2xy \quad \frac{xdx}{m^2-x^2} \quad \frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= - \frac{\pi^2}{4p} \quad [2s - 1 + Cos.\ 2smp - Sin.\ 2smp. \quad Cot.\ mp] \quad Tang.\ 2mp \ \ldots\ldots (159),$$

(732) et (733) (après qu'on y a changé q, p en s, r), et (734) et (735) seulement par (CXXXIII) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^2 rx.\ Cos.\ tx.\ Si.(x)\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ Cos.^2pr.\ Cos.\ pt.\ Si.(p)$ ... (47), $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^2rx.\ Sin.\ tx.\ Si.(x)\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^2pr.\ Sin.\ pt.\ Si.(p)$ ... (48), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^2rx.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - tx).\ Si.(x)\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ Sin.^2pr.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - pt).\ Si.(p)$ .... (49), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^2rx.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - tx).\ Si.(x)\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Sin.^2pr.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - pt)\ Si.(p)$ ... (50), (où partout il est $t > sr$); — (736) et (737) par (CXXX) et (CXXXI) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.\ 2sxy.\ Cot.\ xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m}\ \{1 - Sin.\ 2smp.\ Cot.\ mp\}$ ... (51), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.\ 2srx.\ Cot.\ rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4}\ \{1 - Sin.\ 2spr.\ Cot.\ pr\}$ ... (52), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^2 sxy.\ Cot.\ xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Sin.^2 smp.\ Cot.\ mp$ .... (53), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^2srx.\ Cot.\ rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Sin.^2spr.\ Cot.\ pr$ ... (54); — (747) et (746) seulement par (CXXXIV): $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.2sxy.\ Cot.xy.\ Si.(x)\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}\ Si.(m).\ \{1 - Sin.2smp.\ Cot.mp\}$ ... (55); — (748) et (749) par (CXXX) et (CXXXI) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.4sxy.\ Tang.xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\{1 + Sin.4smp.\ Tang.\ mp\}$ ... (56), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.\ 4srx.\ Tang.\ rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ \{1 + Sin.\ 4spr.\ Tang.\ pr\}$ ... (57), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^2 2sxy.\ Tang.\ xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Sin.^2 2smp.\ Tang.\ mp$ ... (58), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^2 2srx.\ Tang.\ rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Sin.^2spr.\ Tang.\ pr$ ... (59). Encore (750) et (751) également: $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.\ 2sxy.\ Cosec.\ xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\ Sin.\ 2smp.\ Cosec.\ mp$ ... (60), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.\ 2srx.\ Cosec.\ rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ Sin.\ 2spr.\ Cosec.\ pr$ ... (61), $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^2sxy.\ Cosec.\ xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= - \frac{\pi^2}{4p}$ Sin.$^2 smp$. Cosec. mp ... (62), $\int_0^\infty \int_0^\infty$ Sin.$^2 srx$. Cosec. rx $\frac{xdx}{y^2 - x^2}$ $\frac{dy}{p^2 - y^2}$ $=$

$= - \frac{\pi^2}{4p}$ Sin.$^2 spr$. Cosec. pr ... (63); — (769) et (768) seulement par (CXXXIV): $\int_0^\infty \int_0^\infty$ Sin. $4sxy$. Tang. xy. Si.(x) $\frac{xdx}{m^2 - x^2}$ $\frac{dy}{p^2 - y^2}$ $= - \frac{\pi^2}{4p}$ Si.(m). $\{1 +$ Sin. $4smp$. Tang. $mp\}$ ... (64); — (770) et (771) par (CXXXII) et (CXXXIII) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty \int_0^\infty$ Sin.$^2 sxy$. Cosec. xy. Si.(x) $\frac{dx}{m^2 - x^2}$ $\frac{ydy}{p^2 - y^2}$ $=$

$= - \frac{\pi^2}{4m}$ Sin.$^2 smp$. Cosec. mp. Si.(p) ... (65), $\int_0^\infty \int_0^\infty$ Sin.$^2 srx$. Cosec. rx. Si.(x) $\frac{dx}{y^2 - x^2}$ $\frac{y^2 dy}{p^2 - y^2}$ $=$

$= - \frac{\pi^2}{4}$ Sin.$^2 spr$. Cosec. pr. Si.(p) ... (66), $\int_0^\infty \int_0^\infty$ Sin. $2sxy$. Cosec. xy. Si.(x) $\frac{xdx}{m^2 - x^2}$ $\frac{dy}{p^2 - y^2}$ $=$

$= - \frac{\pi^2}{4p}$ Sin. $2smp$. Cosec. mp. Si.(p) ... (67), $\int_0^\infty \int_0^\infty$ Sin. $2srx$. Cosec. rx. Si.(x) $\frac{xdx}{y^2 - x^2}$ $\frac{dy}{p^2 - y^2}$ $=$

$= - \frac{\pi^2}{4p}$ Sin. $2spr$. Cosec. pr. Si.(p) ... (68); — et encore de même (773) et (772):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{Cos.}\, sxy - q\text{Cos.}\{(s-1)xy\}}{1 - 2q\text{Cos.}\, xy + q^2} \frac{dx}{m^2 - x^2} \frac{ydy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4m} \frac{\text{Cos.}\, smp - q\text{Cos.}\{(s-1)mp\}}{1 - 2q\text{Cos.}\, mp + q^2} \;\ldots (69),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{Cos.}\, srx - q\text{Cos.}\{(s-1)rx\}}{1 - 2q\text{Cos.}\, rx + q^2} \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{\text{Cos.}\, spr - q\text{Cos.}\{(s-1)pr\}}{1 - 2q\text{Cos.}\, pr + q^2} \;\ldots (70),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\, sxy - q\text{Sin.}\{(s-1)xy\}}{1 - 2q\text{Cos.}\, xy + q^2} \frac{xdx}{m^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4p} \frac{\text{Sin.}\, smp - q\text{Sin.}\{(s-1)mp\}}{1 - 2q\text{Cos.}\, mp + q^2} \;\ldots (71),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\, srx - q\text{Sin.}\{(s-1)rx\}}{1 - 2q\text{Cos.}\, rx + q^2} \frac{xdx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4p} \frac{\text{Sin.}\, spr - q\text{Sin.}\{(s-1)pr\}}{1 - 2q\text{Cos.}\, pr + q^2} \;\ldots (72).$$

50. Dans le paragraphe IV nous rencontrons de nouvelles intégrales qui pourront nous servir ici. Ainsi les intégrales (831) et (830) donnent tant par les théorèmes (CXXXII) et (CXXXIII) que par les autres (CXXXIV) et (CXXXV):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \text{Cos.}^s xy.\ \text{Sin.}\, sxy.\ \text{Tang.}\, 2xy \frac{dx}{m^2 - x^2} \frac{ydy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4m} (1 + \text{Tang.}\, 2mp.\ \text{Cos.}^s mp.\ \text{Sin.}\, smp) \ldots (73),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \text{Cos.}^s rx.\ \text{Sin.}\, srx.\ \text{Tang.}\, 2rx \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4} (1 + \text{Tang.}\, 2pr.\ \text{Cos.}^s pr.\ \text{Sin.}\, spr) \ldots (74),$$

$\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - \text{Cos.}^s xy.\ \text{Cos.}\, sxy)$ Tang. $2xy$ $\frac{xdx}{m^2 - x^2}$ $\frac{dy}{p^2 - y^2}$ $= - \frac{\pi^2}{4p}$ Tang. $2mp$. $(1 - \text{Cos.}^s mp.$ Cos. $smp)$ ...... (75), $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - \text{Cos.}^s rx.\ \text{Cos.}\, srx)$ Tang. $2rx$ $\frac{xdx}{y^2 - x^2}$ $\frac{dy}{p^2 - y^2}$ $=$

$= - \frac{\pi^2}{4p}$ *Tang.* $2pr.$ $(1 - Cos.^s pr.\ Cos.\ spr)$ ... (76); — (833) et (832) de même: $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^s xy.\ Sin.\ sxy.\ Cot.\ 2xy \frac{dx}{m^2 - x^2} \frac{ydy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4m} (1 - Cot.\ 2mp.\ Cos.^s mp.\ Sin.\ smp)$ ... (77), $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^s rx.\ Sin.\ srx.\ Cot.\ 2rx \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{4} (1 - Cot.\ 2pr.\ Cos.^s pr.\ Sin.\ spr)$ ... (78), $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s xy.\ Cos.\ sxy)\ Cot.\ 2xy \frac{xdx}{m^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Cot.\ 2mp.\ (1 - Cos.^s mp.\ Cos.\ smp)$. (79), $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s rx.\ Cos.\ srx)\ Cot.\ 2rx \frac{xdx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Cot.\ 2pr.\ (1 - Cos.^s pr.$ $Cos.\ spr)$ ... (80). — Encore (835) et (834) également: $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^{s-1} xy.\ Sin.\ sxy.$ $Cosec.\ xy \frac{dx}{m^2 - x^4} \frac{ydy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4m} Cosec.\ mp.\ Cos.^{s-1} mp.\ Sin.\ smp$ .... (81), $\int_0^\infty \int_0^\infty Cos.^{s-1} rx.\ Sin.\ srx.\ Cosec.\ rx \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4} Cosec.\ pr.\ Cos.^{s-1} pr.$ $Sin.\ spr$ .... (82), $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s xy.\ Cos.\ sxy)\ Cosec.\ 2xy \frac{xdx}{m^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} =$ $= - \frac{\pi^2}{4p} Cosec.\ 2mp.\ (1 - Cos.^s mp.\ Cos.\ smp)$ ..... (83), $\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - Cos.^s rx.\ Cos.\ srx)$ $Cosec.\ 2rx \frac{xdx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Cosec.\ 2pr.\ (1 - Cos.^s pr.\ Cos.\ spr)$ ... (84); — (856) et (855) par (CXXX) et (CXXXI) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s xy.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - sxy).\ Tang.\ 2xy \frac{dx}{m^2 - x^2} \frac{ydy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4m} Tang.\ 2mp.\ Sin.^s mp.$ $Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - smp)$ ... (85), $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - srx).\ Tang.\ 2rx \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} =$ $= - \frac{\pi^2}{4} Tang.\ 2pr.\ Sin.^s pr.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - spr)$ ... (86), $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s xy.\ Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - sxy).$ $Tang.\ 2xy \frac{xdx}{m^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Tang.\ 2mp.\ Sin.^s mp.\ Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - smp)$ ... (87), $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - rx).\ Tang.\ 2rx \frac{xdx}{y^2 - x^2} \frac{dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4p} Tang.\ 2pr.\ Sin.^s pr.$ $Cos.(\tfrac{1}{2} s\pi - spr)$ ... (88); — (858) et (857) par les mêmes théorèmes: $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s xy.$ $Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - sxy).\ Cot.\ 2xy \frac{dx}{m^2 - x^2} \frac{ydy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4m} Cot.\ 2mp.\ Sin.^s mp.\ Sin.(\tfrac{1}{2} s\pi - smp)$ ... (89), $\int_0^\infty \int_0^\infty Sin.^s rx.\ Sin(\tfrac{1}{2} s\pi - srx).\ Cot.\ 2rx \frac{dx}{y^2 - x^2} \frac{y^2 dy}{p^2 - y^2} = - \frac{\pi^2}{4} Cot.\ 2pr.\ Sin.^s pr.$

$Sin.(\frac{1}{2}s\pi - spr) \ldots (90)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^s xy.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - sxy).\ Cot.\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cot.\ 2mp.\ Sin.^s mp.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - smp) \ldots (91)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^s rx.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - srx).\ Cot.\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cot.\ 2pr.\ Sin.^s pr.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - spr) \ldots (92)$; — et encore également (860) et (859): $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1} xy. Sin.(\frac{1}{2}s\pi - sxy). Sec. xy \frac{dx}{m^2-x^2}\frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\ Sec.\ mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - smp) \ldots (93)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1} rx.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - srx).\ Sec.\ rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ Sec.\ pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ Sin.(\frac{1}{2}s\pi - spr) \ldots\ldots (94)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1} xy.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - sxy).\ Sec.\ xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Sec.\ mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - smp) \ldots (95)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1} rx.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - srx).\ Sec.\ rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Sec.\ pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ Cos.(\frac{1}{2}s\pi - spr) \ldots (96)$. — (877) et (876) par l'intermédiaire des théorèmes (CXXX) et (CXXXI), (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)xy\}.\ Tang.\ 2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\ Cos.^q mp.\ Sin.^s mp.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)mp\}.\ Tang.\ 2mp \ldots (97)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)rx\}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)pr\}.\ Tang.\ 2pr \ldots (98)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)xy\}.\ Tang.\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^q mp.\ Sin.^s mp.\ Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)mp\}.\ Tang.\ 2mp \ldots (99)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)rx\}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)pr\}.\ Tang.\ 2pr \ldots (100)$; — (879) et (878) tout de même: $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)xy\}.\ Cot.\ 2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\ Cos.^q mp.\ Sin.^s mp.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)mp\}.\ Cot.\ 2mp \ldots (101)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)rx\}.\ Cot.\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ Sin.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)pr\}.\ Cot.\ 2pr \ldots (102)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ Cos.\{\frac{1}{2}s\pi - (q+s)xy\}$.

$\mathrm{Cot.}\, 2xy \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp\right\}.\ \mathrm{Cot.}\, 2mp$ ... (103), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\}.\ \mathrm{Cot.}\, 2rx \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} \mathrm{Cos.}^q pr.$ $\mathrm{Sin.}^s pr.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr\right\}.\ \mathrm{Cot.}\, 2pr$ ..... (104); — et encore (881) et (880): $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} xy.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} xy.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy\right\} \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m} \mathrm{Cos.}^{q-1} mp.$ $\mathrm{Sin.}^{s-1} mp.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp\right\}$ .... (105), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.$ $\mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx\right\} \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4} \mathrm{Cos.}^{q-1} pr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} pr.\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr\right\}$. (106), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} xy.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} xy.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy\right\} \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} \mathrm{Cos.}^{q-1} mp.$ $\mathrm{Sin.}^{s-1} mp.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp\right\}$ ... (107), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi - -(q+s)rx\right\} \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} \mathrm{Cos.}^{q-1} pr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} pr.\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr\right\}$ ... (108).

Tant par les théorèmes (CXXXII) et (CXXXIII) que par (CXXXIV) et (CXXXV) les intégrales (997) et (996) donnent: $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q xy.\ \mathrm{Sin.}^s xy.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi - -(q+s)xy - t\,\mathrm{Sin.}\,2xy\right\}.\ \mathrm{Tang.}\, 2xy \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m} \mathrm{Tang.}\, 2mp.\ \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.$ $e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,\mathrm{Sin.}\,2mp\right\}$ ... (109), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}$ $\mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}.\ \mathrm{Tang.}\, 2rx \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4} \mathrm{Tang.}\, 2pr.\ \mathrm{Cos.}^q pr.$ $\mathrm{Sin.}^s pr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2pr}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,\mathrm{Sin.}\,2pr\right\}$ ... (110), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q xy.\ \mathrm{Sin.}^s xy.$ $e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,\mathrm{Sin.}\,2xy\right\}.\ \mathrm{Tang.}\, 2xy \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p} \mathrm{Tang.}\, 2mp.$ $\mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,\mathrm{Sin.}\,2mp\right\}$ ... (111), $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.$ $e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}.\ \mathrm{Tang.}\, 2rx \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p} \mathrm{Tang.}\, 2pr.$ $\mathrm{Cos.}^q pr.\ \mathrm{Sin.}^s pr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2pr}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,\mathrm{Sin.}\,2pr\right\}$ ... (112); — de même (999) et (998): $\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q xy.\ \mathrm{Sin.}^s xy.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,\mathrm{Sin.}\,2xy\right\}.\mathrm{Cot.}\,2xy \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = = \frac{\pi^2}{4m} \mathrm{Cot.}\, 2mp.\ \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,\mathrm{Sin.}\,2mp\right\}$ ... (113).

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}.\ \mathrm{Cot.}\,2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4}\ \mathrm{Cot.}\ 2pr.\ \mathrm{Cos.}^q pr.\ \mathrm{Sin.}^s pr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2pr}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2pr\right\}\ \ldots\ (114),$$
$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q xy.\ \mathrm{Sin.}^s xy.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,\mathrm{Sin.}\,2xy\right\}.\ \mathrm{Cot.}\,2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cot.}\ 2mp.\ \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mp\right\}\ \ldots\ (115),$$
$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}.\ \mathrm{Cot.}\,2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cot.}\ 2pr.\ \mathrm{Cos.}^q pr.\ \mathrm{Sin.}^s pr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2pr}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2pr\right\}\ \ldots\ (116);\ —$$

encore également (1001) et (1000): $\int_0^\infty\!\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} xy.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} xy.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,\mathrm{Sin.}\,2xy\right\}\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4m}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} mp.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} mp.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,\mathrm{Sin.}\,2mp\right\}$ ... (117), $\int_0^\infty\!\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} pr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} pr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2pr}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2pr\right\}$ ... (118), $\int_0^\infty\!\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} xy.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} xy.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)xy-t\,\mathrm{Sin.}\ 2xy\right\}\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} mp.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} mp.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)mp-t\,\mathrm{Sin.}\ 2mp\right\}$ ... (119), $\int_0^\infty\!\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^{q-1} rx.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4p}\ \mathrm{Cos.}^{q-1} pr.\ \mathrm{Sin.}^{s-1} pr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2pr}\ \mathrm{Cos.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s)pr-t\,\mathrm{Sin.}\ 2pr\right\}$ ... (120). — Les intégrales (1082) et (1081) donnent par les théorèmes (CXXXII) et (CXXXIII) et par (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\!\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q xy.\ \mathrm{Sin.}^s xy.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2xy}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t\,\mathrm{Sin.}\ 2xy\right\}.\ \mathrm{Tang.}\,2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2}=$

$$=\frac{\pi^2}{4m}\ \mathrm{Tang.}\ 2mp.\ \mathrm{Cos.}^q mp.\ \mathrm{Sin.}^s mp.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2mp}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t\,\mathrm{Sin.}\,2mp\right\}\ \ldots\ (121),$$
$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \mathrm{Cos.}^q rx.\ \mathrm{Sin.}^s rx.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2rx}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t\,\mathrm{Sin.}\,2rx\right\}.\ \mathrm{Tang.}\,2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4}\ \mathrm{Tang.}\ 2pr.\ \mathrm{Cos.}^q pr.\ \mathrm{Sin.}^s pr.\ e^{t\,\mathrm{Cos.}\,2pr}\ \mathrm{Sin.}\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t\,\mathrm{Sin.}\,2pr\right\}\ \ldots\ (122),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ e^{t Cos. 2xy}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t Sin. 2xy\right\}.\ Tang. 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4p}\ Tang. 2mp.\ Cos.^q mp.\ Sin.^s mp.\ e^{t Cos. 2mp}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}\ \ldots\ (123),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t Cos. 2rx}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\}.\ Tang. 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4p}\ Tang. 2pr.\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ e^{t Cos. 2pr}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t Sin. 2pr\right\}\ \ldots\ (124);\ -$$

encore (1084) et (1083): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ e^{t Cos. 2xy}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-\right.$ $\left.-t Sin. 2xy\right\}.\ Cot. 2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4m}\ Cot. 2mp.\ Cos.^q mp.\ Sin.^s mp.\ e^{t Cos. 2mp}$ $Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}\ \ldots\ (125)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.\ e^{t Cos. 2rx}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-\right.$ $\left.-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\}.\ Cot. 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4}\ Cot. 2pr.\ Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.$ $e^{t Cos. 2pr}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t Sin. 2pr\right\}\ \ldots\ (126)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q xy.\ Sin.^s xy.\ e^{t Cos. 2xy}$ $Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t Sin. 2xy\right\}.\ Cot. 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4p}\ Cot. 2mp.\ Cos.^q mp.$ $Sin.^s mp.\ e^{t Cos. 2mp}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}\ \ldots\ (127)$, $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^q rx.\ Sin.^s rx.$ $e^{t Cos. 2rx}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\}.\ Cot. 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=\frac{\pi^2}{4p}\ Cot. 2pr.$ $Cos.^q pr.\ Sin.^s pr.\ e^{t Cos. 2pr}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t Sin. 2pr\right\}\ \ldots\ (128)$; — et (1086) et (1085):

$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} xy.\ Sin.^{s-1} xy.\ e^{t Cos. 2xy}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t Sin. 2xy\right\}\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4m}\ Cos.^{q-1} mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ e^{t Cos. 2mp}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}\ \ldots\ (129),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx.\ e^{t Cos. 2rx}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\}\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\ Cos.^{q-1} pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ e^{t Cos. 2pr}\ Sin.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)pr-t Sin. 2pr\right\}\ \ldots\ (130),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} xy.\ Sin.^{s-1} xy.\ e^{t Cos. 2xy}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)xy-t Sin. 2xy\right\}\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4p}\ Cos.^{q-1} mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ e^{t Cos. 2mp}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)mp-t Sin. 2mp\right\}\ \ldots\ (131),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1} rx.\ Sin.^{s-1} rx.\ e^{t Cos. 2rx}\ Cos.\left\{\tfrac{1}{2}s\pi-(q+s+2)rx-t Sin. 2rx\right\}\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2}=$$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ $Cos.^{q-1} pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ e^{t\,Cos.\,2pr}\ Cos.\left\{\frac{1}{2} s\pi - (q+s+2)pr - t\,Sin.\,2pr\right\}$ ... (132). — Dans ces douze dernières intégrales on peut bien annuler q, mais non pas t, à cause de la même condition qui a lieu pour les équations (1081) à (1086). Puis les intégrales (1090) et (1089) donnent par (CXXXII) et (CXXXIII), et par (CXXXV) et (CXXXVI): $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}xy.\ Sin.^{s-1}xy.\ Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}.\ Tang.\,2xy\,\frac{dx}{m^2-x^2}\,\frac{ydy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4m}$ $Tang.\ 2mp.\ Cos.^{q-1} mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (q+s)mp\right\}$ .... (133),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\ Sin.^{s-1}rx.\ Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)rx\right\}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4}$ $Tang.\ 2pr.\ Cos.^{q-1} pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (q+s)pr\right\}$ .... (134),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}xy.\ Sin.^{s-1}xy.\ Cos.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}.\ Tang.\,2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ $Tang.\ 2mp.\ Cos.^{q-1} mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ Cos.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (q+s)mp\right\}$ .... (135),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\ Sin.^{s-1}rx.\ Cos.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)rx\right\}.\ Tang.\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ $Tang.\ 2pr.\ Cos.^{q-1}pr.\ Sin.^{s-1}pr.\ Cos.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)pr\right\}$ ... (136); — (1092) et (1091) de même: $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}xy.\ Sin.^{s-1}xy.\ Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}.\ Cot.\,2xy\,\frac{dx}{m^2-x^2}\,\frac{ydy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4m}$ $Cot.\ 2mp.\ Cos.^{q-1} mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (q+s)mp\right\}$ .... (137),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\ Sin.^{s-1}rx.\ Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)rx\right\}.\ Cot.\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4}$ $Cot.\ 2pr.\ Cos.^{q-1} pr.\ Sin.^{s-1} pr.\ Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (q+s)pr\right\}$ .... (138),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}xy.\ Sin.^{s-1}xy.\ Cos.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}.\ Cot.\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ $Cot.\ 2mp.\ Cos.^{q-1} mp.\ Sin.^{s-1} mp.\ Cos.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (q+s)mp\right\}$ .... (139),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-1}rx.\ Sin.^{s-1}rx.\ Cos.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)rx\right\}.\ Cot.\,2rx\,\frac{xdx}{y^2-x^2}\,\frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}\ Cot.\ 2pr.$ $Cos.^{q-1}pr.\ Sin.^{s-1}pr.\ Cos.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)pr\right\}$ ... (140); — (1094) et (1093) encore: $\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-2}xy.\ Sin.^{s-2}xy.\ Sin.\left\{(s-1)\frac{1}{2}\pi-(q+s)xy\right\}\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4m}$ $Cos.^{q-2}\,mp.$ $Sin.^{s-2}\,mp.$ $Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)mp\}$ .... (141),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-2}\,rx.\ Sin.^{s-2}\,rx.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)rx\}\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4}$ $Cos.^{q-2}\,pr.$ $Sin.^{s-2}\,pr.$ $Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)pr\}$ .... (142),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-2}\,xy.\ Sin.^{s-2}\,xy.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)xy\}\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ $Cos.^{q-2}\,mp.$ $Sin.^{s-2}\,mp.$ $Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)mp\}$ .... (143),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Cos.^{q-2}\,rx.\ Sin.^{s-2}\,rx.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)rx\}\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ $Cos.^{q-2}\,pr.$ $Sin.^{s-2}\,pr.$ $Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(q+s)pr\}$ .... (144); —
(1098) et (1097) par (CXXXII) et (CXXXIII) et par (CXXXIV) et (CXXXV):

$\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1}\,xy.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)xy\}.\ Tang.\,2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4m}$ $Tang.\,2mp.$ $Sin.^{s-1}\,mp.$ $Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mp\}$ .... (145),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1}\,rx.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}.\ Tang.\,2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4}$ $Tang.\,2pr.$ $Sin.^{s-1}\,pr.$ $Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)pr\}$ .... (146),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1}\,xy.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)xy\}.\ Tang.\,2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ $Tang.\,2mp.$ $Sin.^{s-1}\,mp.$ $Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mp\}$ .... (147),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1}\,rx.\ Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}.\ Tang.\,2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ $Tang.\,2pr.$ $Sin.^{s-1}\,pr.$ $Cos.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)pr\}$ .... (148); —
(1100) et (1099) de même: $\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1}\,xy.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)xy\}.$
$Cot.\,2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m}\ Cot.\,2mp.\ Sin.^{s-1}mp.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)mp\}$ ... (149),

$\int_0^\infty\int_0^\infty Sin.^{s-1}\,rx.\ Sin.\{(s-1)\tfrac{1}{2}\pi-(s+1)rx\}.\ Cot.\,2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4}$ *Cot.* $2pr.$ *Sin.* $^{s-1} pr.$ *Sin.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)pr\}$ .... (150),

$\int_0^\infty \int_0^\infty$ *Sin.* $^{s-1} xy.$ *Cos.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)xy\}.$ *Cot.* $2xy \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ *Cot.* $2mp.$ *Sin.* $^{s-1} mp.$ *Cos.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)mp\}$ .... (151),

$\int_0^\infty \int_0^\infty$ *Sin.* $^{s-1} rx.$ *Cos.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)rx\}.$ *Cot.* $2rx \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}$ *Cot.* $2pr.$ *Sin.* $^{s-1} pr.$ *Cos.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)pr\}$ ... (152); — (1102) et (1101) encore:

$\int_0^\infty \int_0^\infty$ *Sin.* $^{s-2} xy.$ *Sin.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)xy\}.$ *Sec.* $xy \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4m}$ *Sin.* $^{s-2} mp.$ *Sin.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)mp\}.$ *Sec.* mp .... (153),

$\int_0^\infty \int_0^\infty$ *Sin.* $^{s-2} rx.$ *Sin.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)rx\}.$ *Sec.* $rx \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4}$ *Sin.* $^{s-2} pr.$ *Sin.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)pr\}.$ *Sec.* pr .... (154),

$\int_0^\infty \int_0^\infty$ *Sin.* $^{s-2} xy.$ *Cos.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)xy\}.$ *Sec.* $xy \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ *Sin.* $^{s-2} mp.$ *Cos.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)mp\}.$ *Sec.* mp .... (155),

$\int_0^\infty \int_0^\infty$ *Sin.* $^{s-2} rx.$ *Cos.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)rx\}.$ *Sec.* $rx \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= \frac{\pi^2}{4p}$ *Sin.* $^{s-2} pr.$ *Cos.* $\{(s-1)\frac{1}{2}\pi - (s+1)pr\}.$ *Sec.* pr .... (156). — Les intégrales (1119) et (1118) par les théorèmes (CXXX) et (CXXXI), et (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty \int_0^\infty [-$ *Sin.* $2sxy + (1 -$ *Cos.* $2sxy)$ *Cot.* $xy]$ *Tang.* $2xy \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m} [2s +$ *Tang.* $2mp. \{-$ *Sin.* $2smp + (1 -$ *Cos.* $2smp)$ *Cot.* $mp\}]$ ... (157), $\int_0^\infty \int_0^\infty [-$*Sin.* $2srx + (1-$*Cos.* $2srx)$ *Cot.* $rx]$ *Tang.* $2rx \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$

$= -\frac{\pi^2}{4} [2s +$ *Tang.* $2pr. \{-$ *Sin.* $2spr + (1 -$ *Cos.* $2spr)$ *Cot.* $pr\}]$ ...... (158),

$\int_0^\infty \int_0^\infty [2s - 1 +$ *Cos.* $2sxy -$ *Sin.* $2sxy.$ *Cot.* $xy]$ *Tang.* $2xy \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} =$

$= -\frac{\pi^2}{4p} [2s - 1 +$ *Cos.* $2smp -$ *Sin.* $2smp.$ *Cot.* $mp]$ *Tang.* $2mp$ ...... (159),

$\int_0^\infty\int_0^\infty [2s-1+Cos.\ 2srx - Sin.\ 2srx.\ Cot.\ rx]\ Tang.\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$
$= -\frac{\pi^2}{4p}[2s-1+Cos.\ 2spr - Sin.\ 2spr.\ Cot.\ pr]\ Tang.\ 2pr$ ... (160); — tout de même (1121) et (1120): $\int_0^\infty\int_0^\infty [-Sin.\ 2sxy+(1-Cos.\ 2sxy)\ Cot.\ xy]\ Cot.\ 2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} =$
$= \frac{\pi^2}{4m}[2s - Cot.\ 2mp.\ \{-Sin.\ 2smp + (1-Cos.\ 2smp)\ Cot.\ mp\}]$ .... (161),
$\int_0^\infty\int_0^\infty [-Sin.\ 2srx + (1-Cos.\ 2srx)\ Cot.\ rx]\ Cot.\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$
$= \frac{\pi^2}{4}[2s - Cot.\ 2pr.\ \{-Sin.\ 2spr + (1-Cos.\ 2spr)\ Cot.\ pr\}]$ .... (162),
$\int_0^\infty\int_0^\infty [2s-1+Cos.\ 2sxy - Sin.\ 2sxy.\ Cot.\ xy]\ Cot.\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$
$= \frac{-\pi^2}{4p}[2s-1+Cos.\ 2smp - Sin.\ 2smp.\ Cot.\ mp]\ Cot.\ 2mp$ .... (163),
$\int_0^\infty\int_0^\infty [2s-1+Cos.\ 2srx - Sin.\ 2srx.\ Cot.\ rx]\ Cot.\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$
$= \frac{-\pi^2}{4p}[2s-1+Cos.2spr - Sin.2spr.\ Cot.pr]\ Cot.2pr$. (164); — et encore (1123) et (1122):
$\int_0^\infty\int_0^\infty [-Sin.\ 2sxy + (1-Cos.\ 2sxy)\ Cot.\ xy]\ Cosec.\ 2xy\ \frac{dx}{m^2-x^2}\ \frac{ydy}{p^2-y^2} =$
$= \frac{\pi^2}{4m}\ Cosec.\ 2mp.\ \{Sin.\ 2smp - (1-Cos.\ 2smp)\ Cot.\ mp\}$ .... (165),
$\int_0^\infty\int_0^\infty [-Sin.\ 2srx + (1-Cos.\ 2srx)\ Cot.\ rx]\ Cosec.\ 2rx\ \frac{dx}{y^2-x^2}\ \frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$
$= \frac{\pi^2}{4}\ Cosec.\ 2pr.\ \{Sin.\ 2spr - (1-Cos.\ 2spr)\ Cot.\ pr\}$ .... (166),
$\int_0^\infty\int_0^\infty [2s-1+Cos.\ 2sxy - Sin.\ 2sxy.\ Cot.\ xy]\ Cosec.\ 2xy\ \frac{xdx}{m^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$
$= -\frac{\pi^2}{4p}[2s-1+Cos.\ 2smp - Sin.\ 2smp.\ Cot.\ mp]\ Cosec.\ 2mp$ .... (167),
$\int_0^\infty\int_0^\infty [2s-1+Cos.\ 2srx - Sin.\ 2srx.\ Cot.\ rx]\ Cosec.\ 2rx\ \frac{xdx}{y^2-x^2}\ \frac{dy}{p^2-y^2} =$
$= -\frac{\pi^2}{4p}[2s-1+Cos.\ 2spr - Sin.\ 2spr.\ Cot.\ pr]\ Cosec.\ 2pr$ .... (168). —
Les intégrales (1144) et (1143) par les théorèmes (CXXXII) et (CXXXIII), (CXXXIV) et (CXXXV): $\int_0^\infty\int_0^\infty [Sin.\ 4sxy - (1-Cos.\ 4sxy)\ Tang.\ xy$

$Tang. 2xy \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m} [2 + Tang. 2mp. \{ Sin. 4smp - (1 - Cos. 4smp)\ Tang. mp \}]$ ... (169), $\int_0^\infty \int_0^\infty [Sin.\ 4srx - (1 - Cos.\ 4srx)\ Tang.\ rx]\ Tang.\ 2rx \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2 dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4} [2 + Tang.\ 2pr.\ \{ Sin.\ 4spr - (1 - Cos.\ 4spr)\ Tang.\ pr \}]$ ... (170), $\int_0^\infty \int_0^\infty [1 - Cos. 4sxy + Sin. 4sxy.\ Tang\, xy]\ Tang. 2xy \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} [1 - Cos.\ 4smp + Sin.\ 4smp.\ Tang.\ mp]\ Tang.\ 2mp$ ... (171), $\int_0^\infty \int_0^\infty [1 - Cos.\ 4srx + Sin.\ 4srx.\ Tang.\ rx]\ Tang. 2rx \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} [1 - Cos. 4spr + Sin. 4spr.\ Tang. pr]\ Tang. 2pr$ ... (172); — puis (1146) et (1145) tout de même: $\int_0^\infty \int_0^\infty [Sin.\ 4sxy - (1 - Cos.\ 4sxy)\ Tang.\ xy]\ Cot. 2xy \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m} [2 - Cot. 2mp. \{ Sin. 4smp - (1 - Cos. 4smp)\ Tang. mp \}]$ ... (173), $\int_0^\infty \int_0^\infty [Sin. 4srx - (1 - Cos. 4srx)\ Tang. rx]\ Cot.\ 2rx \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2 dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4} [2 - Cot. 2pr. \{ Sin.\ 4spr - (1 - Cos.\ 4spr)\ Tang.\ pr \}]$ ... (174), $\int_0^\infty \int_0^\infty [1 - Cos.\ 4sxy + Sin.\ 4sxy.\ Tang. xy]\ Cot.\ 2xy \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} [1 - Cos. 4smp + Sin. 4smp.\ Tang. mp]\ Cot.\ 2mp$ ... (175), $\int_0^\infty \int_0^\infty [1 - Cos. 4srx + Sin. 4srx.\ Tang. rx]\ Cot. 2rx \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} [1 - Cos. 4spr + Sin.\ 4spr.\ Tang.\ pr]\ Cot.\ 2pr$ ... (176); — les intégrales (1148) et (1147) encore: $\int_0^\infty \int_0^\infty [Sin. 4sxy - (1 - Cos. 4sxy)\ Tang. xy]\ Cosec. 2xy \frac{dx}{m^2-x^2} \frac{ydy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m} Cosec. 2mp. \{ Sin. 4smp - (1 - Cos. 4smp)\ Tang. mp \}$ ... (177), $\int_0^\infty \int_0^\infty [Sin. 4srx - (1 - Cos. 4srx)\ Tang. rx]\ Cosec. 2rx \frac{dx}{y^2-x^2} \frac{y^2 dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4} Cosec. 2pr. \{ Sin. 4spr - (1 - Cos. 4spr)\ Tang. pr \}$ ... (178), $\int_0^\infty \int_0^\infty [1 - Cos. 4sxy + Sin. 4sxy.\ Tang. xy]\ Cosec. 2xy \frac{xdx}{m^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} [1 - Cos. 4smp + Sin.\ 4smp.\ Tang.\ mp]\ Cosec.\ 2mp$ ... (179), $\int_0^\infty \int_0^\infty [1 - Cos. 4srx + Sin.\ 4srx.\ Tang.\ rx]\ Cosec.\ 2rx \frac{xdx}{y^2-x^2} \frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4p} [1 - Cos.\ 4spr + Sin.\ 4spr.\ Tang.\ pr]\ Cosec.\ 2pr$ ... (180). — Les intégrales (1173) et (1172) tant par les théorèmes

(CXXXII) et (CXXXIII) que par les suivants (CXXXIV) et (CXXXV):

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,xy - q^s\,Sin.\,sxy + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)xy\}}{1-2q\,Cos.\,xy+q^2}\,Tang.\,xy\,\frac{dx}{m^2-x^2}\,\frac{ydy}{p^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4m}\left[\frac{1-q^s}{1-q} - Tang.\,mp\,\frac{q\,Sin.\,mp - q^s\,Sin.\,smp + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)mp\}}{1-2q\,Cos.\,mp+q^2}\right] \ldots (181),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,rx - q^s\,Sin.\,srx + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,Tang.\,rx\,\frac{dx}{y^2-x^2}\,\frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1-q^s}{1-q} - Tang.\,pr\,\frac{q\,Sin.\,pr - q^s\,Sin.\,spr + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)pr\}}{1-2q\,Cos.\,pr+q^2}\right] \ldots (182),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,Cos.\,xy - q^s\,Cos.\,sxy + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)xy\}}{1-2q\,Cos.\,xy+q^2}\right] Tang.\,xy\,\frac{xdx}{m^2-x^2}\,\frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4p}\,Tang.\,mp.\left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,Cos.\,mp - q^s\,Cos.\,smp + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)mp\}}{1-2q\,Cos.\,mp+q^2}\right] \ldots (183),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,Cos.\,rx - q^s\,Cos.\,srx + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\right] Tang.\,rx\,\frac{xdx}{y^2-x^2}\,\frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4p}\,Tang.\,pr.\left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,Cos.\,pr - q^s\,Cos.\,spr + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)pr\}}{1-2q\,Cos.\,pr+q^2}\right] \ldots (184); -$$

(1175) et (1174) également: $\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,xy - q^s\,Sin.\,sxy + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)xy\}}{1-2q\,Cos.\,xy+q^2}$

$$Cot.xy\,\frac{dx}{m^2-x^2}\,\frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m}\left[\frac{1-q^s}{1-q} - Cot.\,mp\,\frac{q\,Sin.mp - q^s Sin.smp + q^{s+1} Sin.\{(s-1)mp\}}{1-2q\,Cos.\,mp+q^2}\right].(185),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,rx - q^s\,Sin.\,srx + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\,Cot.\,rx\,\frac{dx}{y^2-x^2}\,\frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1-q^s}{1-q} - Cot.\,pr\,\frac{q\,Sin.\,pr - q^s\,Sin.\,spr + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)pr\}}{1-2q\,Cos.\,pr+q^2}\right] \ldots (186),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,Cos.\,xy - q^s\,Cos.\,sxy + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)xy\}}{1-2q\,Cos.\,xy+q^2}\right] Cot.\,xy\,\frac{xdx}{m^2-x^2}\,\frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4p}\,Cot.\,mp.\left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,Cos.\,mp - q^s\,Cos.\,smp + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)mp\}}{1-2q\,Cos.\,mp+q^2}\right] \ldots (187),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,Cos.\,rx - q^s\,Cos.\,srx + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)rx\}}{1-2q\,Cos.\,rx+q^2}\right] Cot.rx\,\frac{xdx}{y^2-x^2}\,\frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4p}\,Cot.pr.\left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,Cos.\,pr - q^s\,Cos.\,spr + q^{s+1}\,Cos.\{(s-1)pr\}}{1-2q\,Cos.\,pr+q^2}\right] \ldots (188): -$$

enfin (1177) et (1176) tout de même: $\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q\,Sin.xy - q^s\,Sin.\,sxy + q^{s+1}\,Sin.\{(s-1)xy\}}{1-2q\,Cos.\,xy+q^2}$

$$\text{Cosec.}\, xy \frac{dx}{m^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2} = -\frac{\pi^2}{4m}\text{Cosec.}\, mp\, \frac{q\,\text{Sin.}\, mp - q^s\,\text{Sin.}\, smp + q^{s+1}\,\text{Sin.}\{(s-1)mp\}}{1-2q\,\text{Cos.}\, mp+q^2} \ldots (189),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q\,\text{Sin.}\, rx - q^s\,\text{Sin.}\, srx + q^{s+1}\,\text{Sin.}\{(s-1)rx\}}{1-2q\,\text{Cos.}\, rx+q^2}\,\text{Cosec.}\, rx\, \frac{dx}{y^2-x^2}\frac{y^2dy}{p^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}\,\text{Cosec.}\, pr\, \frac{q\,\text{Sin.}\, pr - q^s\,\text{Sin.}\, spr + q^{s+1}\,\text{Sin.}\{(s-1)pr\}}{1-2q\,\text{Cos.}\, pr+q^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (190),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,\text{Cos.}\, xy - q^s\,\text{Cos.}\, sxy + q^{s+1}\,\text{Cos.}\{(s-1)xy\}}{1-2q\,\text{Cos.}\, xy+q^2}\right]\text{Cosec.}\, xy\,\frac{xdx}{m^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4p}\,\text{Cosec.}\, mp.\left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,\text{Cos.}\, mp - q^s\,\text{Cos.}\, smp + q^{s+1}\,\text{Cos}\{(s-1)mp\}}{1-2q\,\text{Cos.}\, mp+q^2}\right] \ldots (191),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,\text{Cos.}\, rx - q^s\,\text{Cos.}\, srx + q^{s+1}\,\text{Cos.}\{(s-1)rx\}}{1-2q\,\text{Cos.}\, rx+q^2}\right]\text{Cosec.}\, rx\,\frac{xdx}{y^2-x^2}\frac{dy}{p^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{4p}\,\text{Cosec.}\, pr.\left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q\,\text{Cos.}\, pr - q^s\,\text{Cos.}\, spr + q^{s+1}\,\text{Cos.}\{(s-1)pr\}}{1-2q\,\text{Cos.}\, pr+q^2}\right] \ldots (192).$$



51. Les intégrales définies doubles qu'on vient de déduire peuvent toutes se résumer sous une des quatre formes suivantes:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(s, xy)\,\frac{dx}{m^2-x^2}\,\frac{ydy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4m}\,\{\varphi(s, mp) + C\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma\varrho),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(s, rx)\,\frac{dx}{y^2-x^2}\,\frac{y^2dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4}\,\{\varphi(s, pr) + C\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma\varsigma),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_1(s, xy)\,\frac{xdx}{m^2-x^2}\,\frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}\,\{\varphi_1(s, mp) + C\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma\tau),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_1(s, rx)\,\frac{xdx}{y^2-x^2}\,\frac{dy}{p^2-y^2} = \frac{\pi^2}{4p}\,\{\varphi_1(s, pr) + C\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma\upsilon),$$

où C, qui pour la plupart est zéro, est toujours indépendant des constantes m, p, r. Lorsque maintenant dans les équations $(\gamma\varrho)$, $(\gamma\tau)$ on prend $m=z$, $p=v$, ou $m=v$, $p=z$, et qu'on en agisse de même dans les équations $(\gamma\varsigma)$ et $(\gamma\upsilon)$, on obtiendrait des intégrales quadruples, en quelque sorte analogues aux résultats obtenus.



